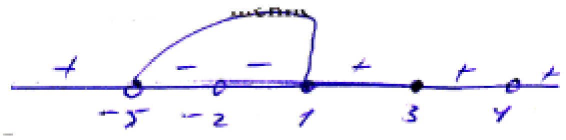
Вариант 3-1

1. Решить неравенство: $\dfrac{\left(x^2-2x-8\right)\left(x^2-4x+3\right)(x-3)}{\left(x^2+x-20\right)\left(x^2+2\right)(x+2)} \le 0$.

Решение.
Разложим на множители

$$\frac{(x-4)(x-1)(x+2)(x-3)^2}{(x-4)\left(x^2+2\right)(x+2)(x+5)} \le 0,\ x \ne 4, x \ne -2, x \ne -5,\ \frac{(x-1)(x-3)^2}{\left(x^2+2\right)(x+5)} \le 0,$$



Ответ:
$(-5,-2) \cup$
$(-2,1] \cup \{3\}$

2. Вычислить $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{4} + \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{7+3-2\sqrt{21}+2\sqrt{21}}{4} = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

3. Упростить до числа $\dfrac{x^{7/3}-9x^{1/3}}{x^{7/3}+3x^{4/3}} + \dfrac{x+27x^{-2}}{x+9x^{-1}-3}$.

Решение:

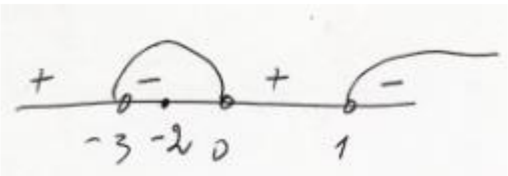
$$\frac{x^{1/3}(x^2-9)}{x^{4/3}(x+3)} + \frac{x^3+27}{x^3+9x-3x^2} = \frac{x-3}{x} + \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x(x^2-3x+9)} = \frac{2x}{x} = 2$$

Ответ: 2

4. Решить неравенство, в ответ записать наименьшее целое решение: $\dfrac{1}{1-x} < \dfrac{3}{x+3}$.

Решение:

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{x+3} < 0, \frac{-4x}{(1-x)(x+3)} < 0,$$



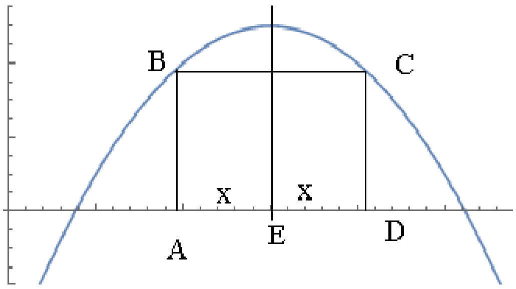
$x \in (-3;0) \cup (1;+\infty)$. **Ответ**: -2.

5. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+x+8}=-3x-6$.
Решение.
$2x^2+x+8=(-3x-6)^2$, $x_1=-4, x_2=-1$, с учетом $-3x-6\geq 0$, Ответ: $x=-4$.

6. Число M+3 составляет 40% от числа N–1. Сколько процентов составляет число M+4 от числа 2N+3?
Решение:
M+3=0,4(N-1); M+4=(N-1)·0,4+1=(2N-2) ·0,1+1=(2N-2) ·0,2+1=(2N+3-5) ·0,2+1=(2N+3)0,2

Ответ: 20%

7. В фигуру, ограниченную параболой $y=-x^2+10x-22$ и осью OX, поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две другие - на оси OX. Найдите наибольший из периметров, который может иметь такой прямоугольник.
Решение. Точка E (5;0).



В точке A(5–x;0) значение параболы равно $3-x^2$, периметр равен
$4x+2(3-x^2)=-2x^2+4x+6=-2(x-1)^2+8$, наименьшее значение равно 8 при x=1.
Ответ: 8.

8. Найти значения *k*, при которых вершина параболы $y=(k-1)x^2-6x+k-1$ лежит во II четверти. В ответ записать наименьшее целое значение *k*.
Решение:
Координаты вершины (x_0,y_0). Так как во II четверти $x_0<0$, $y_0>0$, отсюда 6/2(k-1) <0, k<1.
Парабола имеет ветви вниз, значит, чтобы $y_0>0$ уравнение $(k-1)x^2-6x+k-1=0$
должно иметь корни.
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{-k^2+2k+8}}{k-1},$$
Корни существуют, если
$-k^2+2k+8>0$, отсюда $-2<k<4$,
учитывая k<1, получим $-2<k<1$. Ответ: -1.

9. Какое наименьшее число подряд идущих членов арифметической прогрессии 5;17;29;… (не обязательно начиная с первого) надо взять, чтобы их сумма равнялась полному квадрату? Чему равно наименьшее значение такой суммы?

Решение:
Какое наименьшее число подряд идущих членов арифметической прогрессии 5;17;29;… (не обязательно начиная с первого) надо взять, чтобы их сумма равнялась полному квадрату? Чему равно наименьшее значение такой суммы?

Решение.

Все члены прогрессии 5; 17; 29… . имеют остаток 5 при делении на 12. Сумма двух таких чисел дает остаток 10, сумма трех дает $15-12=3$, сумма четырех имеет остаток 3+5=8 и т.д.

Рассмотрим теперь, какой остаток может иметь при делении на 12 число вида k^2. Легко понять, что если k имеет остаток r при делении на 12, то k^2 имеет остаток такой же, что и r^2. Составим таблицу, в верхней строке которой будут остатки для k, а в нижней для k^2.

Остаток k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Остаток k^2	0	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1

Мы видим, что остаток числа k^2 может быть только 0,1,4 или 9.
Это означает, что сумма одного, двух, трех или четырех членов данной прогрессии не может быть квадратом целого числа. Попробуем взять пять слагаемых, они дадут остаток $5\cdot 5-24=1,$ который может иметь квадрат.
$12k-19+12k-7+12k+5+12k+17+12k+29=n^2 \;\; k\geq 2.$
$60k+25=n^2.$ Левая часть делится на 5, следовательно, $n=5m.$
$60k+25=25m^2;\, 12k=5m^2-5=5(m^2-1).$ Наименьшее $m,$
при котором m^2-1 делится на 12, равно 1, но при этом k=0 не удовлетворяет условию $k\geq 2.$ Следующее $m=5,$ откуда $k=5.$
Ответ: наименьшее число слагаемых 5. Наименьшее значение суммы пяти подряд идущих слагаемых, являющейся точным квадратом равно
$101+113+\cdots\ldots.+149=625=25^2.$

10. Найдите все такие натуральные числа $n,$ для которых выполнено условие:
$\text{НОД}(n-2, n^3+2)+\text{НОК}(n-2, n^3+2)=n^3+n.$

Решение:

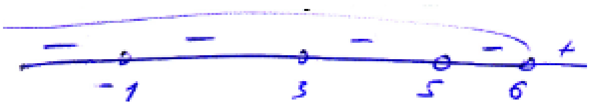
Обозначим $a=n-2;\, b=n^3+2.$ Тогда уравнение запишется в виде $\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=a+b.$ Напишем еще одно соотношение, верное для любых целых a и b. Получим систему
$\begin{cases}\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=a+b\\ \text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=a\cdot b\end{cases}$. Очевидно, что решением этой системы может быть только $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=a\\ \text{НОК}(a,b)=b\end{cases}$ или $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=b\\ \text{НОК}(a,b)=a\end{cases}.$
Поскольку НОК всегда не меньше НОДа, второй случай невозможен.
Остается $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=a\\ \text{НОК}(a,b)=b\end{cases}$, что равносильно тому, что b делится на $a.$
$\frac{n^3+2}{n-2}=n^2+2n+4+\frac{10}{n-2}$. Из этого равенства видно, что n^3+2 будет делиться на $n-2$ тогда и только тогда, когда $n-2$ является делителем 10. $n-2=1 \;\Rightarrow n=3;\; n-2=2 \;\Rightarrow n=4;$
$n-2=5 \;\Rightarrow n=7;\; n-2=10 \;\Rightarrow n=12.$
Ответ: $\{3; 4; 7; 12\}.$

Вариант 3-2

1. Решить неравенство: $\dfrac{(x^2-2x+3)(x^2-8x+15)(x-5)}{(x^2-9x+18)(x+1)^2}<0$.

Решение.
Разложим на множители

$$\frac{(x-3)(x^2-2x+3)(x-5)^2}{(x-6)(x-3)(x+1)^2}<0,\ x\neq 6, x\neq 3, x\neq 5, x\neq -1,\ \frac{(x^2-2x+3)(x-5)^2}{(x-6)(x+1)^2}<0,$$



Ответ: $(-\infty,-1)\cup$ $(-1,3)\cup$ $(3,5)\cup(5,6)$

2. Вычислить $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+\sqrt{21}}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Решение:

$$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{21}}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{-4}+\frac{\sqrt{21}}{2}=\frac{7+3+2\sqrt{21}-2\sqrt{21}}{-4}=-2{,}5.$$

Ответ: $-2{,}5$

3. Упростить до числа $\dfrac{a^{2/3}-8b\cdot a^{-1/3}}{a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3}}:\left(2\cdot\sqrt[3]{b\cdot a^{-1}}-1\right)$.

Решение:

$$\frac{(a-8b)\cdot a^{-1/3}}{a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3}}:\left(2\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{a^{1/3}}-1\right)=\frac{(a^{1/3}-2b^{1/3})(a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3})}{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3}\right)}:\left(2\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{a^{1/3}}-1\right)=$$

$$=\frac{(a^{1/3}-2b^{1/3})}{2b^{1/3}-a^{1/3}}=\text{-1}$$

Ответ: -1

4. Решить неравенство, в ответ записать наибольшее целое отрицательное решение:
$\dfrac{5}{2-x}>\dfrac{3}{x+2}$.
Решение:

$\frac{5}{2-x}-\frac{3}{x+2}>0$, $\frac{-4(2x+1)}{(x+2)(x-2)}>0$

x∈(-∞;-2)∪(-1/2;2).

Ответ: –3

5. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+x+4}=-2x-3$.

Решение:

$2x^2+x+4=(-2x-3)^2$, $x_1=-5, x_2=-1/2$, с учетом $-2x-3\geq 0$, Ответ: $x=-5$.

Ответ: –5

6. Число M+3 составляет 20% от числа N–1. Сколько процентов составляет число M+4 от числа 2N+8?

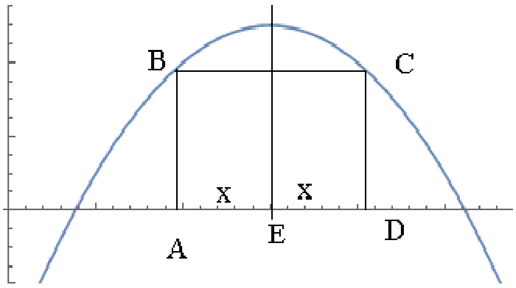
Решение:

M+3=0,2(N-1); M+4=(N-1)·0,2+1=(2N-2) ·0,1+1=(2N+8-10) ·0,1+1=(2N+8) ·0,1

Ответ: 10%

7. В фигуру, ограниченную параболой $y=-x^2+8x-11$ и осью OX, поместили прямоугольник, две вершины которого лежат на параболе, а две другие - на оси OX. Найдите наибольший из периметров, который может иметь такой прямоугольник.

Решение. Точка E (4;0).



В точке A(4–x;0) значение параболы равно $5-x^2$, периметр равен

$4x+2(5-x^2)=-2x^2+4x+10=-2(x-1)^2+12$, наименьшее значение равно 12 при x=1.

Ответ: 12.

8. Найти значения *k*, при которых вершина параболы $y=(k-9)x^2+4kx-2k$ лежит в IV четверти. В ответ записать наибольшее целое значение *k*.

Решение

Координаты вершины (x_0,y_0). Так как во IV четверти x_0 >0, y_0<0, отсюда $\frac{-4k}{2(k-9)}>0$,

0<k<9.

Парабола имеет ветви вниз, значит, чтобы y_0<0 уравнение $(k-9)x^2+4kx-2k=0$ не имеет корней.

$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{6k^2-18k}}{k-9}$,

Корни не существуют, если

$k^2-3k<0$, отсюда $0<k<3$,

учитывая 0<k<9, получим $0<k<3$. **Ответ**: 2.

9. Какое наименьшее число подряд идущих членов арифметической прогрессии 5;21;37… (не обязательно начиная с первого) надо взять, чтобы их сумма равнялась полному квадрату? Чему равно наименьшее значение такой суммы?

Решение.

Все члены прогрессии 5; 21; 37… . имеют остаток 5 при делении на 16. Сумма двух таких чисел дает остаток 10, сумма трех дает 15, сумма четырех имеет остаток 24–16=8 и т.д.

Рассмотрим теперь, какой остаток может иметь при делении на 16 число вида k^2. Легко понять, что если k имеет остаток r при делении на 16, то k^2 имеет остаток такой же, что и r^2. Составим таблицу, в верхней строке которой будут остатки для k, а в нижней для k^2.

Остаток k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Остаток k^2	0	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1

Мы видим, что остаток числа k^2 может быть только 0,1,4 или 9.
Это означает, что сумма одного, двух, трех или четырех членов данной прогрессии не может быть квадратом целого числа. Попробуем взять пять слагаемых, они дадут остаток $5\cdot 5-16=9,$ который может иметь квадрат.
$(16k-27)+(16k-11)+(16k+5)+(16k+21)+(16k+37)=n^2$,
$k\geq 2$.
$80k+25=n^2$. Левая часть делится на 5, следовательно, $n=5m$.
$80k+25=25m^2$; $16k=5m^2-5=5(m^2-1)$. Наименьшее m, при котором m^2-1 делится на 16, равно 1, но при этом k=0 не удовлетворяет условию $k\geq 2$. Следующее $m=7,$ откуда $k=15$.
Ответ: наименьшее число слагаемых 5. Наименьшее значение суммы пяти подряд идущих слагаемых, являющейся точным квадратом равно
$213+229+245+261+277=1225=35^2$.

10. Найдите все такие натуральные числа n, для которых выполнено условие:
НОД$(n-2, n^3+2)$ + НОК$(n-2, n^3+2) = n^3+n$.

Решение:
Обозначим $a=n-2$; $b=n^3+2.$ Тогда уравнение запишется в виде НОД(a,b) + НОК$(a,b)=a+b$. Напишем еще одно соотношение, верное для любых целых a и b. Получим систему
$\begin{cases}\text{НОД}(a,b)+\text{НОК}(a,b)=a+b\\ \text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=a\cdot b\end{cases}$. Очевидно, что решением этой системы может быть только $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=a\\ \text{НОК}(a,b)=b\end{cases}$ или $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=b\\ \text{НОК}(a,b)=a\end{cases}$.
Поскольку НОК всегда не меньше НОДа, второй случай невозможен.
Остается $\begin{cases}\text{НОД}(a,b)=a\\ \text{НОК}(a,b)=b\end{cases}$, что равносильно тому, что b делится на a.
$\frac{n^3+2}{n-2}=n^2+2n+4+\frac{10}{n-2}$. Из этого равенства видно, что n^3+2 будет делиться на $n-2$ тогда и только тогда, когда $n-2$ является делителем 10. $n-2=1 \Rightarrow n=3$; $n-2=2 \Rightarrow n=4$;
$n-2=5 \Rightarrow n=7$; $n-2=10 \Rightarrow n=12$.
Ответ: $\{3; 4; 7; 12\}$.