Математика. 10-11 класс.

Вариант-42

Задача 1. (4 балла)

Найти значение выражения A при $x=\sqrt[4]{6}$, $y=\sqrt[8]{2}$, если

$$A=\left(\frac{x+2y}{8y^3\left(x^2+2xy+2y^2\right)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right).$$

Решение. Преобразуем выражение.

$$A=\left(\frac{x+2y}{8y^3\left(x^2+2xy+2y^2\right)}-\frac{(x-2y):8y^3}{x^2-2xy+2y^2}\right)+\left(\frac{y^{-2}}{4x^2-8y^2}-\frac{1}{4x^2y^2+8y^4}\right)=$$

$$=\left(\frac{x+2y}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)}-\frac{x-2y}{8y^3(x^2-2xy+2y^2)}\right)+\left(\frac{1}{4y^2(x^2-2y^2)}-\frac{1}{4y^2(x^2+2y^2)}\right)=$$

$$=\left(\frac{(x+2y)(x^2-2xy+2y^2)-(x-2y)(x^2+2xy+2y^2)}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)}\right)+\left(\frac{1\cdot(x^2+2y^2)-1\cdot(x^2-2y^2)}{4y^2(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)}\right)=$$

$$=\left(\frac{8y^3}{8y^3(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)}\right)+\left(\frac{4y^2}{4y^2(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{x^4+4y^4}+\frac{1}{x^4-4y^4}=\frac{2x^4}{(x^4+4y^4)(x^4-4y^4)}=\frac{2x^4}{x^8-16y^8}.$$ Таким образом, $A=\dfrac{2x^4}{x^8-16y^8}$.

Если $x=\sqrt[4]{6}$, $y=\sqrt[8]{2}$, то $A=\dfrac{2\cdot(\sqrt[4]{6})^4}{(\sqrt[4]{6})^8-16\cdot(\sqrt[8]{2})^8}=\dfrac{2\cdot 6}{36-32}=\dfrac{12}{4}=3$.

Ответ. $A=3$.

Задача 2. (4 балла)

Решить уравнение $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

Решение.

Так как $x=2, x=-2$ не являются корнями уравнения, а $x=1, x=-1$ не входят в область допустимых значений, то обе части уравнения можно разделить на $\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$.

Получим уравнение, равносильное исходному

$$20\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}-5\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}+48=0.$$

Обозначим $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=t$. Получим уравнение $20t-\dfrac{5}{t}+48=0$.

Решив его, получим $t_1=-\dfrac{5}{2}, t_2=\dfrac{1}{10}$.

Найдем x, решив два уравнения $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=-\frac{5}{2}$ и $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{10}$.

Уравнение $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=-\frac{5}{2}$ не имеет решений.

Решим уравнение $\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x+1)}=\frac{1}{10}$. Выполнив алгебраические преобразования, получим уравнение $9x^2-33x+18=0$ ($D=441=21^2$), которое имеет корни $x_1=3,\ x_2=\frac{2}{3}$.

Ответ. $x_1=3, x_2=\frac{2}{3}$.

Задача 3. (4 баллов)

Решить уравнение $\frac{\cos^2 3t}{tgt}+\frac{\cos^2 t}{tg3t}=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} tgt\neq 0, \\ tg3t\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} t\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \\ t\neq \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, \end{cases} n\in Z.$

Решаем уравнение.

$\frac{tg3t\cdot\cos^2 3t+tgt\cdot\cos^2 t}{tgt\cdot tg3t}=0,$

$tg3t\cdot\cos^2 3t+tgt\cdot\cos^2 t=0,$

$\sin 3t\cdot\cos 3t+\sin t\cdot\cos t=0,$

$\sin 4t\cdot\cos 2t=0,$

$\sin 4t=0$ или $\qquad \cos 2t=0;$

$t=\frac{\pi l}{4} \qquad t=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k,l\in Z$

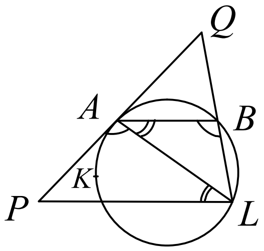
Учитывая ОДЗ, получаем решение уравнения: $t=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z$.

Ответ. $t=\frac{\pi}{4}(2k+1), k\in Z$.

Задача 4. (8 баллов)

В треугольнике PQL проведена средняя линия AB, соединяющая стороны PQ и QL. Длина стороны PL равна $\sqrt{2}$, синус угла $\angle PLQ$ равен $\frac{1}{3}$. Окружность, проведенная через точки A, B и L, касается стороны PQ. Найти радиус этой окружности.

Решение.



Так как $\angle ABL = \frac{1}{2} \cup AKL$ – по свойству вписанного угла, а $\angle PAL = \frac{1}{2} \cup AKL$ – по свойству угла между хордой и касательной, то $\angle PAL = \angle ABL = \frac{1}{2} \cup AKL$.

$\angle PLK = \angle LAB$, как внутренние накрест лежащие при $AB \parallel PL$.

Поэтому $\Delta PAL \sim \Delta ABL$.

$$AB = \frac{1}{2} PL = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

$$\frac{AL}{AB} = \frac{PL}{AL} \Rightarrow AL^2 = PL \cdot AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow AL = 1.$$

По теореме синусов имеем: $\dfrac{AL}{\sin \angle ABL} = \dfrac{AL}{\sin(\pi - \angle PLQ)} = \dfrac{AL}{\sin \angle PLQ} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3 = 2R$.

Тогда $R = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Ответ. 1,5.

Задача 5. (8 баллов)

Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили $\frac{1}{5}$ часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили $\frac{1}{5}$ часть смеси и долили такое же количество воды. Так проделали n раз (включая первое переливание). Найдите наименьшее значение n, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 30 %.

Решение.

В результате n-го переливания чистого спирта в сосуде останется $\frac{4}{5}$ от его количества до этого переливания, т.е. $f(n)=\left(\frac{4}{5}\right)^n$ от исходного количества. Функция $f(n)$ от аргумента $n\in N$ убывает, причем

$$f(5)=\left(\frac{4}{5}\right)^5=\frac{1024}{3125}>\frac{1}{30},$$

$$f(6)=\left(\frac{4}{5}\right)^6=\frac{4096}{15625}<\frac{1}{30},$$

поэтому число n, для которого $f(n)<\frac{1}{30}$, есть $n=6$.

Ответ. 6.

Задача 6. (12 баллов)

Выражения $1-\cos 2x$, $\cos x-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sin^{-2}x$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если известно, что пятнадцатый член этой прогрессии равен $\frac{27}{8}$.

Решение.

Из условия следует, что $(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}\sin^{-2}x=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2$.

Решим уравнение.

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin^2 x}=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x}=\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Значит, $\cos x-\frac{1}{2}=1$ (не имеет решения) или $\cos x-\frac{1}{2}=-1$.

$\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

При этом,

$$1-\cos 2x=1-\cos\left(2\cdot\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\right)=1-\cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n\right)=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},$$

$$\cos x-\frac{1}{2}=\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1,$$

$$\frac{1}{2}\sin^{-2}x=\frac{1}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2\left(\sin\left(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\right)^2}=\frac{1}{2\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}.$$

Числа $\frac{3}{2}$, -1 и $\frac{2}{3}$ являются k, $k+1$, $k+2$ членами геометрической прогрессии соответственно. Отсюда $q=-1:\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}$, значит $b_{15}=\frac{27}{8}=b_1q^{14}$, и $b_k=\frac{3}{2}=b_1q^{k-1}$, т.е. $\frac{b_k}{b_{15}}=\frac{b_1q^{k-1}}{b_1q^{14}}=q^{k-15}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-15}$ или $\frac{b_k}{b_{15}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{27}{8}}=\frac{4}{9}=\left(-\frac{2}{3}\right)^2$. Тогда получаем, что $k-15=2$ или $k=17$.

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$**,** $\boldsymbol{k}$ **=17.**

Задача 7. (12 баллов)

Решить неравенство $\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$.

Решение.

I способ.

$\sqrt{x^4-2x^2+1}>1-x$,

$\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}>1-x$,

$\left|x^2-1\right|>1-x$,

$$\left[\begin{cases}x^2-1>0,\\ x^2-1>1-x;\end{cases}\right.\quad \left[\begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\ x^2+x-2>0;\end{cases}\right.\quad \left[\begin{cases}(x-1)(x+1)>0,\\ (x-1)(x+2)>0;\end{cases}\right.$$
$$\quad\begin{cases}x^2-1<0,\\ 1-x^2<1-x.\end{cases}\quad\quad \begin{cases}(x-1)(x+1)<0,\\ x^2-x>0.\end{cases}\quad\quad \begin{cases}(x-1)(x+1)<0,\\ x(x-1)<0.\end{cases}$$

Тогда

$\left[\begin{array}{l}x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty),\\ x\in(0;1).\end{array}\right.$ Следовательно, $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

II способ.

Это иррациональное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x^4-2x^2+1\ge 0,\\ 1-x\ge 0,\\ x^4-2x^2+1>(1-x)^2;\end{cases}\\ \begin{cases} x^4-2x^2+1\ge 0,\\ 1-x<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему.

$$\begin{cases} x^4-2x^2+1\ge 0,\\ 1-x\ge 0,\\ x^4-2x^2+1>(1-x)^2;\end{cases} \begin{cases} (x^2-1)^2\ge 0,\\ x\le 1,\\ (x^2-1)^2>(1-x)^2;\end{cases} \begin{cases} (x^2-1)^2\ge 0,\\ x\le 1,\\ (x^2-1)^2>(x-1)^2.\end{cases}$$

Первое неравенство полученной системы верно при любых действительных значениях переменной x. Получаем $\begin{cases} x\in(-\infty;1] \\ x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)\end{cases}$. Следовательно, решением этой системы является промежуток $(-\infty;-2)\cup(0;1)$.

Рассмотрим вторую систему.

$$\begin{cases} x^4-2x^2+1\ge 0,\\ 1-x<0;\end{cases} \begin{cases} (x^2-1)^2\ge 0,\\ x>1.\end{cases}.$$

Первое неравенство этой системы верно при любых действительных значениях переменной x. Следовательно, решением этой системы является промежуток $x>1$.

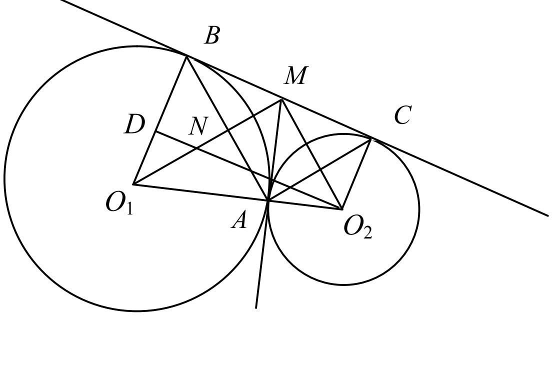
Объединяя эти решения, получим ответ $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$.

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$**.**

Задача 8. (16 баллов)

Две окружности касаются внешним образом в точке A. Найди радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания одной из общих внешних касательных, равны 6см и 8см.

Решение.



Пусть $R = O_1B$ и $r = O_2C$ – искомые радиусы. Проведем общую касательную AM. Точку пересечения BA и MO_1 обозначим N.

Тогда $AM^2 = (0{,}5AC)^2 + (0{,}5AB)^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, откуда $AM = BM = MC = 5$ см, $MN = 3$ см.

В ΔO_1BM: $O_1M^2 = R^2 + MB^2$ или $O_1M^2 = R^2 + 25$.

В ΔO_1NB: $R^2 = O_1N^2 + BN^2$ или $R^2 = (O_1M - 3)^2 + 16$.

Из этих двух этих равенств находим, что $O_1M = \dfrac{25}{3}$ см, а значит $R = \dfrac{20}{3}$.

Проведем $O_2D \| BC$. В ΔO_1DO_2: $(R+r)^2 = (R-r)^2 + O_2D^2$ или $(R+r)^2 = (R-r)^2 + 10^2$.

Отсюда найдем, что $r = \dfrac{15}{4}$ см.

Ответ. $\dfrac{20}{3}$ **см и** $\dfrac{15}{4}$ **см.**

Задача 9. (16 баллов)

Найти все значения параметра a, при которых уравнение $4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$ не имеет решений.

Решение.

$4^x + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$,

$(2^x)^2 + (a^2+5)\cdot 2^x - a^2 + 9 = 0$.

Пусть $2^x = t$, $t > 0$.

$t^2 + (a^2+5)\cdot t - a^2 + 9 = 0$.

$D = (a^2+5)^2 - 4(9 - a^2) = a^4 + 10a^2 + 25 - 36 + 4a^2 = a^4 + 14b^2 - 11 = (a^2+7)^2 - 60$.

1) Уравнение $t^2 + (a^2+5)\cdot t - a^2 + 9 = 0$ не будет иметь решения, если $D < 0$, т.е.

$(a^2+7)^2 - 60 < 0$,

$(a^2 + 7 - \sqrt{60})(a^2 + 7 + \sqrt{60}) < 0$,

$(a^2 - (\sqrt{60} - 7)) < 0$,

$\left(a - \sqrt{\sqrt{60} - 7}\right)\left(a + \sqrt{\sqrt{60} - 7}\right) < 0$,

$a \in \left(-\sqrt{\sqrt{60} - 7}; \sqrt{\sqrt{60} - 7}\right)$.

ИЛИ.

2) Уравнение $t^2 + (a^2+5)\cdot t - a^2 + 9 = 0$ не будет иметь решения, если $t_1 + t_2 < 0$ и $t_1 \cdot t_2 \ge 0$, т.е. $\begin{cases} 9 - a^2 \ge 0, \\ -(a^2+5) < 0; \end{cases}$ $(a+3)(a-3) \le 0$, $a \in [-3;3]$.

Таким образом, объединяя два случая, получим, что не будет иметь решения при $b \in [-3;3]$.

Ответ. $[-3;3]$.

Задача 10. (16 баллов)

Известно, что для любого натурального числа n выполняется равенство $1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$. Используя его, решить уравнение $(1+27+125+\ldots+(2n-1)^3):(1+4+7+\ldots+(3n-2))=35$.

Решение.

Согласно данному равенству

$1+27+125+\ldots+(2n-1)^3=1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

Тогда уравнение $(1+27+125+\ldots+(2n-1)^3):(1+4+7+\ldots+(3n-2))=35$ примет вид

$n^2(2n^2-1):(1+4+7+\ldots+(3n-2))=35$.

$$\frac{n^2(2n^2-1)}{(1+4+7+\ldots+(3n-2))}=35.$$

Знаменатель в левой части равенства представляет собой сумму n первых членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=1$, $a_n=3n-2$ и разностью $d=3$.

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{1+3n-2}{2}\cdot n=\frac{(3n-1)n}{2}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{2n^2(2n^2-1)}{n(3n-1)}=35,$$

$2n^2(2n^2-1)=35n(3n-1)$,

$4n^4-2n^2-105n^2+35n=0$,

$n(4n^3-107n+35)=0$,

$4n^3-107n+35=0$.

Определяем, что $n_1=5$ является одним из корней уравнения, т.е.

$(n-5)(4n^2+20n-7)=0$.

$$n_2=\frac{-5-4\sqrt{2}}{2},\ n_3=\frac{-5+4\sqrt{2}}{2}.$$

Так как искомое значение n – натуральное число, то решением уравнения является $n_1=5$.

Ответ. $n=5$.