Задача 1. (4 балла)

Найти значение числового выражения A, если

$$A=(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right).$$

Решение.

$$(0{,}1)^{-3}\cdot\left(\frac{3\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{80}}-\frac{5}{4}\sqrt{\frac{4}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+\sqrt{20}-10\sqrt{0{,}2}}{3\frac{1}{2}\sqrt{32}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{8}}+6\sqrt{\frac{2}{9}}-140\sqrt{0{,}02}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5\cdot 2}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{\frac{7\cdot 8}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}+6\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}-140\sqrt{\frac{1}{50}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=10^3\cdot\left(\frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{5}}+5\sqrt{\frac{1}{5}}+10\sqrt{\frac{1}{5}}-10\sqrt{\frac{1}{5}}}{28\sqrt{\frac{1}{2}}-3\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-140\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot\left(\frac{5\sqrt{\frac{1}{5}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}(28-3+1+4-28)}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=1000\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}+1{,}017\right)=$$

$$=1000\cdot(1+1{,}017)=1000\cdot 2{,}017=2017.$$

Ответ. 2017.

Задача 2. (4 балла)

Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться нефтью, причем в первую поступает 100 литров в минуту, во вторую – 60 литров в минуту, в третью – 80 литров в минуту. В начальный момент первая цистерна была пуста, вторая и третья цистерны – частично заполнены. Все три цистерны полностью заполнились одновременно. Во сколько раз количество нефти в начальный момент во второй цистерне было больше, чем в третьей?

Решение.

Примем объем цистерны равные V литров. Пусть первоначальный объем нефти второй цистерны равен x, тогда необходимо заполнить $(V-x)$ от ее объема; пусть первоначальный объем нефти третьей цистерны равен y, тогда необходимо заполнить $(V-y)$ от ее объема. Так как все три цистерны полностью заполнились одновременно, то на заполнение первой полностью пустой цистерны потребовалось $0{,}01\cdot V$ минут. Тогда первоначальный объем второй цистерны равен $60\cdot 0{,}01\cdot V = V - x$, $x = 0{,}4\cdot V$; первоначальный объем второй третьей цистерны равен $80\cdot 0{,}01\cdot V = V - y$, $y = 0{,}2\cdot V$. Следовательно, количество нефти в начальный момент во второй цистерне было в 2 раза больше, чем в третьей.

Ответ. В 2 раза.

Задача 3. (4 балла)

Решить уравнение $x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}}=16$.

Решение.

ОДЗ: $x\ge 0$.

Перепишем левую часть уравнения в виде

$x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x\cdot\ldots}}} = x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots = x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

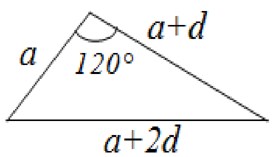
Получим уравнение $x^2=16$, откуда, учитывая ОДЗ, $x=4$.

Ответ. $x=4$**.**

Задача 4. (8 баллов)

Один из углов треугольника равен $120°$, а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

Решение.



Обозначим длины сторон треугольника в порядке возрастания через a, $a+d$, $a+2d$. Тогда наибольшая сторона расположена против наибольшего угла треугольника, равного $120°$. Применим теорему косинусов.

$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2-2a(a+d)\cos 120°$,

$$(a+2d)^2=a^2+(a+d)^2+2a(a+d)\cdot\frac{1}{2},$$

$a^2+4ad+4d^2=a^2+a^2+2ad+d^2+a^2+ad$,

$a^2+4ad+4d^2=3a^2+3ad+d^2$,

$2a^2-ad-3d^2=0$. Поделим все на d^2, $d^2\ne 0$.

$$2\left(\frac{a}{d}\right)^2-\left(\frac{a}{d}\right)-3=0.$$

Учитывая, что $a>0, d>0$, получаем $\frac{a}{d}=\frac{3}{2}$.

Тогда, $a=\frac{3}{2}d$, $a+d=\frac{3}{2}d+d=\frac{5}{2}d$, $a+2d=\frac{3}{2}d+2d=\frac{7}{2}d$.

Найдем отношение длин сторон треугольника:

$a:(a+d):(a+2d)=\frac{3}{2}d:\frac{5}{2}d:\frac{7}{2}d$,

$a:(a+d):(a+2d)=3:5:7$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Ответ. Все треугольники, длины сторон которых относятся как $3:5:7$.

Задача 5. (8 баллов)

Доказать тождество $\dfrac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=ctg^4\alpha$.

Решение.

$\dfrac{2\sin^2 2\alpha+8\sin^2\alpha-8}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=ctg^4\alpha$,

$\dfrac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\left(1-\sin^2\alpha\right)\right)}{1-8\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2 2\alpha\right)}=ctg^4\alpha$,

$\dfrac{2\left(4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha\right)}{1-8\sin^2\alpha-1+2\sin^2 2\alpha}=ctg^4\alpha$,

$\dfrac{-8\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{-8\sin^2\alpha+8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=ctg^4\alpha$,

$\dfrac{-8\cos^4\alpha}{-8\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}=ctg^4\alpha$,

$\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^4\alpha}=ctg^4\alpha$,

$ctg^4\alpha=ctg^4\alpha$.

Что требовалось доказать.

Задача 6. (12 баллов)

Два путешественника идут по одной и той же дороге в одном направлении. Первый находится на расстоянии 8 км впереди другого и идет со скоростью 4 км/ч, другой идет со скоростью 6 км/ч. У одного из путешественников есть собака, которая в момент начала движения, побежала от своего хозяина к другому путешественнику со скоростью 15 км/ч. Затем она вернулась к хозяину и опять побежала к другому путешественнику. Собака бегала от одного к другому до тех пор, пока путешественники не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Решение.

Не пускаясь в тонкие и сложные выкладки, заметим, что собака была в пути (бегала от одного путешественника к другому) до тех пор, пока путешественники не встретились. А путешественники встретились через 4 часа, т.е. $8:(6-4)=4$. Следовательно, собака была в пути 4 часа и за это время пробежала $4\cdot 15=60$ километров.

Ответ. 60 км.

Задача 7. (12 баллов)

Доказать тождество $1+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Решение.

Для доказательства тождества применим метод математической индукции.

1) Проверим справедливость тождества при $n=1$: $1=\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$, $1=1$.

2) Предположим, что данное тождество справедливо при $n=k\geq 1$, т.е. что верно равенство

$$1+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

3) Докажем, что тождество справедливо при $n=k+1$, т.е.

$$1+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Используя индукционное предположение, в левой части тождества получим

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=$$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k+2}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Что требовалось доказать.

Задача 8. (16 баллов)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

Будем считать первое уравнение системы квадратным относительно x. Перепишем его в виде: $2x^2 - (7y - 13)x + 3y^2 - 4y - 7 = 0$. Тогда.

$D = (7y - 13)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3y^2 - 4y - 7) = 49y^2 - 182y + 169 - 24y^2 + 32y + 56 =$

$= 25y^2 - 150y + 225 = (5y - 15)^2$.

$x = \dfrac{7y - 13 - 5y + 15}{4} = \dfrac{2y + 2}{4} = \dfrac{y + 1}{2}$ или $x = \dfrac{7y - 13 + 5y - 15}{4} = \dfrac{12y - 28}{4} = 3y - 7$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(y + 1), \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3y - 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первую систему.

Если $x = \dfrac{1}{2}(y + 1)$, то $\dfrac{1}{4}(y + 1)^2 + \dfrac{1}{2}y(y + 1) + y^2 - 3 = 0$.

$$(y + 1)^2 + 2y(y + 1) + 4y^2 - 12 = 0,$$

$$y^2 + 2y + 1 + 2y^2 + 2y + 4y^2 - 12 = 0,$$

$$7y^2 + 4y - 11 = 0,\ (7 + 4 - 11 = 0),$$

$$y_1 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1;$$

$$y_2 = -\frac{11}{7},\ x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{11}{7} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{7}.$$

Решим вторую систему.

Если $x = 3y - 7$, то $(3y - 7)^2 + y(3y - 7) + y^2 - 3 = 0$.

$$9y^2 - 42y + 49 + 3y^2 - 7y + y^2 - 3 = 0,$$

$$13y^2 - 49y + 46 = 0,\ (D = 49^2 - 4 \cdot 13 \cdot 46 = 2401 - 2392 = 9),$$

$$y_3 = \frac{49-3}{26} = \frac{46}{26} = \frac{23}{13},;$$

$$y_4 = \frac{49+3}{26} = 2,\ x_4 = 3\cdot 2 - 7 = -1.$$

Ответ. $(1;1),(-1;2),\left(-\frac{2}{7};-\frac{11}{7}\right),\left(-\frac{22}{13};\frac{23}{13}\right)$**.**

Задача 9. (16 баллов)

Решить неравенство $2\sin 6x\cos 3x + \cos 6x < -1$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $2\sin 6x\cos 3x + 1 + \cos 6x < 0$.

Приведем тригонометрические функции к одинаковому аргументу:

$1+\cos 6x = 2\cos^2 3x$, $\sin 6x = 2\sin 3x\cos 3x$.

Тогда получим $4\sin 3x\cos^2 3x + 2\cos^2 3x < 0$,

$$2\cos^2 3x(2\sin 3x + 1) < 0.$$

Так как $2\cos^2 3x \ge 0$, то получим равносильные неравенства

$$\begin{cases} 2\sin 3x + 1 < 0, \\ \cos 3x \ne 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin 3x < -\dfrac{1}{2}, \\ \cos 3x \ne 0; \end{cases},$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \ne \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x \ne -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}; \end{cases} \end{array}\right. (n \in Z),$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} < x < -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3}, \\ x \ne \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3} < x < -\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2\pi n}{3}, \\ x \ne -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}; \end{cases} \end{array}\right. (n \in Z)$$

Т.о. $-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}<x<-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$, где $x\neq-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$.

$$x\in\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z.$$

Ответ. $x\in\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3};-\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right), n\in Z$.

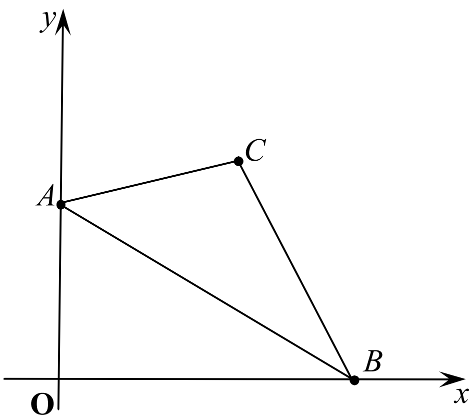
Задача 10. (16 баллов)

Найти все значения x и y, при которых выражение

$z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}$ принимает наименьшее значение.

Решение.

Каждый из радикалов, входящих в выражение $z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}$, представляет собой расстояния между двумя точками координатной плоскости.



Радикал $\sqrt{x^2+(y-5)^2}$ есть расстояние между точками $A(0;5)$ и $C(x;y)$, т.е. $|AC|=\sqrt{x^2+(y-5)^2}$; радикал $\sqrt{y^2+(x-12)^2}$ есть расстояние между точками $B(12;0)$ и $C(x;y)$, т.е. $|CB|=\sqrt{y^2+(x-12)^2}$.

Тогда $z=|AC|+|CB|$. На основании неравенства треугольника: $|AC|+|CB|\geq|AB|$, $z\geq|AB|$.

$|AB|=13$ (по т. Пифагора

$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$).

Т.е., $z\geq13$.

Тогда, наименьшее значение $z=13$.

Все $C(x;y)$, при которых $z=13$, принадлежат отрезку прямой AB при $x\in[0;12]$.

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A(0;5)$ и $B(12;0)$:

$\frac{x}{12}=\frac{y-5}{-5}$. Т.е., $y=-\frac{5}{12}x+5$.

Таким образом, наименьшее значение $z=13$, достигается при $x\in[0;12]$,

$y=-\frac{5}{12}x+5$.

Ответ. $z=13$, $x\in[0;12]$, $y=-\frac{5}{12}x+5$.