Задача 1. (4 балла)

Найти значение выражения A при $a=1-\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}$, если

$$A=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}.$$

Решение.

Преобразуем выражение:

$$A=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{-1}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}\cdot\frac{(a+b)^2-3ab}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^3+a^3}{a^3b^3}}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{(b-a)\cdot a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\cdot\frac{a^2-ab+b^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{-(a-b)}{(a+b)}\cdot\frac{ab}{(a-b)(a+b)}=-\frac{ab}{(a+b)^2}.$$ Таким образом, $A=-\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

Если $a=1-\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}$, то

$$A=-\frac{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2})^2}=-\frac{1^2-(\sqrt{2})^2}{2^2}=-\frac{-1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ответ. $A=\frac{1}{4}$**.**

Задача 2. (4 балла)

Решить уравнение $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

Решение.

Так как $x=5$ не является корнем уравнения, то обе части уравнения можно разделить на $\sqrt[3]{(5-x)^2}$. Получим уравнение, равносильное исходному:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{5+x}{5-x}\right)^2}+4=5\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}.$$

Введем замену $\sqrt[3]{\frac{5+x}{5-x}}=t$. Получим квадратное уравнение $t^2-5t+4=0$.

Решив его, получим $t_1=1,\ t_2=4$.

Найдем x, решив два уравнения $\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}=1$ и $\sqrt[3]{\dfrac{5+x}{5-x}}=4$.

Возведем обе части каждого уравнения в куб.

Получим $\dfrac{5+x}{5-x}=1$, $x=0$; $\dfrac{5+x}{5-x}=64$, $x=\dfrac{63}{13}$.

Ответ. $x_1=0, x_2=\dfrac{63}{13}$.

Задача 3. (4 балла)

Решить уравнение $\dfrac{tgt}{\cos^2 5t}-\dfrac{tg5t}{\cos^2 t}=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}\cos^2 5t\neq 0,\\ \cos^2 t\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases} t\neq \dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5};\\ t\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.\end{cases}$

Решаем уравнение.

$$\frac{tgt\cdot\cos^2 t-tg5t\cdot\cos^2 5t}{\cos^2 5t\cdot\cos^2 t}=0,$$

$tgt\cdot\cos^2 t-tg5t\cdot\cos^2 5t=0$,

$\sin t\cdot\cos t-\sin 5t\cdot\cos 5t=0$,

$2\sin 4t\cdot\cos 6t=0$,

$\sin 4t=0$ или $\cos 6t=0$;

$t=\dfrac{\pi k}{4}$ $\quad t=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi l}{6}, k,l\in Z$

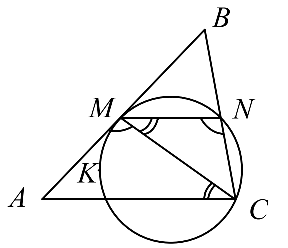
Учитывая ОДЗ, получаем решение уравнения: $t_1=\pi k,\quad t_2=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi l}{6}, k,l\in Z$.

Ответ. $t_1=\pi k,\quad t_2=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi l}{6}, k,l\in Z$.

Задача 4. (8 баллов)

В треугольнике ABC проведена средняя линия MN, соединяющая стороны AB и BC. Окружность радиуса $\sqrt{2}$, проведенная через точки M, N и C, касается стороны AB. Длина стороны AC равна 2. Найти синус угла $\angle ACB$.

Решение.



Так как $\angle MNC = \frac{1}{2} \cup MKC$ – по свойству вписанного угла, а $\angle AMC = \frac{1}{2} \cup MKC$ – по свойству угла между хордой и касательной, то $\angle AMC = \angle MNC = \frac{1}{2} \cup MKC$.

$\angle CMN = \angle ACM$, как внутренние накрест лежащие при $AC \parallel MN$.

Поэтому $\Delta AMC \sim \Delta CNM$.

$MN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

$\frac{AC}{MC} = \frac{MC}{MN} \Rightarrow MC = \sqrt{2}$.

По теореме синусов имеем: $\frac{MC}{\sin \angle ACN} = \frac{MC}{\sin(\pi - \angle ACN)} = \frac{MC}{\sin \angle MNC} = 2R = 2\sqrt{2}$.

Отсюда: $\sin \angle ACN = \frac{MC}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

Ответ. 0,5.

Задача 5. (8 баллов)

Из сосуда, содержащего чистый спирт, отлили $\frac{1}{3}$ часть и добавили такое же количество воды. Потом отлили $\frac{1}{3}$ часть смеси и долили такое же количество воды. Так проделали k раз (включая первое переливание). Найти наименьшее значение k, при котором процентное содержание спирта в сосуде после сделанных переливаний станет меньше 10 %.

Решение.

В результате k-го переливания чистого спирта в сосуде останется $\frac{2}{3}$ от его количества до этого переливания, т.е. $f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ от исходного количества.

Функция $f(k)$ от аргумента $k \in N$ убывает, причем

$f(5)=\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}>\frac{1}{10}$, $f(6)=\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}<\frac{1}{10}$,

поэтому число k, для которого $f(k)<\frac{1}{10}$, есть $k=6$.

Ответ. 6.

Задача 6. (12 баллов)

Найти углы α, β и γ, расположенные в первой четверти, если известно, что они составляют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы составляют геометрическую прогрессию.

Решение.

Пусть $\alpha=\beta-\frac{\pi}{12}$, $\gamma=\beta+\frac{\pi}{12}$. Так как по условию $tg\beta=q\cdot tg\alpha$,

$tg\gamma=q^2\cdot tg\alpha=qt\cdot g\beta$, то $\frac{tg\beta}{tg\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{tg\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)}{tg\beta}$, $tg^2\beta=tg\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right)\cdot tg\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)$.

Преобразуем правую часть этого уравнения

$$tg\left(\beta-\frac{\pi}{12}\right)\cdot tg\left(\beta+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{tg\beta-tg\frac{\pi}{12}}{1+tg\beta\cdot tg\frac{\pi}{12}}\cdot\frac{tg\beta+tg\frac{\pi}{12}}{1-tg\beta\cdot tg\frac{\pi}{12}}=\frac{tg^2\beta-tg^2\frac{\pi}{12}}{1-tg^2\beta\cdot tg^2\frac{\pi}{12}}.$$

Тогда получим $tg^2\beta=\frac{tg^2\beta-tg^2\frac{\pi}{12}}{1-tg^2\beta\cdot tg^2\frac{\pi}{12}}$.

Следовательно, $tg^2\beta\cdot\left(1-tg^2\beta\cdot tg^2\frac{\pi}{12}\right)=tg^2\beta-tg^2\frac{\pi}{12}$

$$tg^2\beta-tg^4\beta\cdot tg^2\frac{\pi}{12}=tg^2\beta-tg^2\frac{\pi}{12}$$

$$tg^4\beta=1.$$

Поскольку $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то $tg\beta=1$ и $\beta=\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $\alpha=\beta-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, $\gamma=\beta+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$**.**

Задача 7. (12 баллов)

Решить неравенство $\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$.

Решение.

I способ.

$\sqrt{4-4x^3+x^6}>x-\sqrt[3]{2}$,

$\sqrt{\left(x^3-2\right)^2}>x-\sqrt[3]{2}$,

$\left|x^3-2\right|>x-\sqrt[3]{2}$,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-2>0,\\ x^3-2>x-\sqrt[3]{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-2<0,\\ x^3-2<x-\sqrt[3]{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-2>0,\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)>x-\sqrt[3]{2};\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-2<0,\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)<x-\sqrt[3]{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^3-2>0,\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1\right)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x^3-2<0,\\ \left(x-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1\right)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Выражение $x^2+x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-1>0$ при любом $x\in R$, так как $D=4-3\sqrt[3]{4}$, $D<0$.

Тогда

$\left[\begin{array}{l}x-\sqrt[3]{2}>0,\\ x-\sqrt[3]{2}<0.\end{array}\right.$ Следовательно, $x\in\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\infty\right)$.

II способ.

Это иррациональное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-4x^3+x^6 \geq 0, \\ x-\sqrt[3]{2} \geq 0, \\ 4-4x^3+x^6 > \left(x-\sqrt[3]{2}\right)^2; \end{cases} \\ \begin{cases} 4-4x^3+x^6 \geq 0, \\ x-\sqrt[3]{2} < 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим первую систему.

$$\begin{cases} 4-4x^3+x^6 \geq 0, \\ x-\sqrt[3]{2} \geq 0, \\ 4-4x^3+x^6 > \left(x-\sqrt[3]{2}\right)^2; \end{cases}, \begin{cases} \left(x^3-2\right)^2 \geq 0, \\ x \geq \sqrt[3]{2}, \\ \left(x^3-2\right)^2 > \left(x-\sqrt[3]{2}\right)^2; \end{cases} \begin{cases} \left(x^3-2\right)^2 \geq 0, \\ x \geq \sqrt[3]{2}, \\ \left(x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)^2 > \left(x-\sqrt[3]{2}\right)^2. \end{cases}.$$

Первое неравенство полученной системы верно при любых действительных значениях переменной x. Второе неравенство верно, если $x \geq \sqrt[3]{2}$. Третье неравенство верно, при любых действительных значениях переменной x, кроме $x = \sqrt[3]{2}$. Следовательно, решением этой системы является промежуток $x > \sqrt[3]{2}$.

Рассмотрим вторую систему.

$$\begin{cases} 4-4x^3+x^6 \geq 0, \\ x-\sqrt[3]{2} < 0; \end{cases} \begin{cases} \left(x^3-2\right)^2 \geq 0, \\ x < \sqrt[3]{2}. \end{cases}.$$

Первое неравенство этой системы верно при любых действительных значениях переменной x. Следовательно, решением этой системы является промежуток $x < \sqrt[3]{2}$.

Объединяя эти решения, получим ответ $x \in \left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; \infty\right)$.

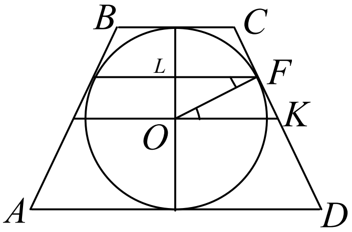
Ответ. $\left(-\infty; \sqrt[3]{2}\right) \cup \left(\sqrt[3]{2}; \infty\right)$.

Задача 8. (16 баллов)

Около окружности радиуса 5 см описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания ее боковых сторон равно 8. Найти площадь трапеции.

Решение.

Проведем $OK \parallel AD$.



Тогда площадь трапеции равна $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{4 \cdot OK}{2} \cdot h = 2 \cdot OK \cdot 10 = 20 \cdot OK$.

Рассмотрим треугольники ΔOLF и ΔOFK. Треугольники прямоугольные, так как $\angle FLO = \angle OFK = 90°$, а углы $\angle LFO = \angle FOK$ как накрест лежащие. Следовательно, $\Delta OLF \sim \Delta OFK$.

Тогда $\frac{OK}{OF} = \frac{OF}{FL}$ или $OK = \frac{OF^2}{FL} = \frac{25}{4}$ (см).

Таким образом, $S = 20 \cdot OK = 20 \cdot \frac{25}{4} = 125$ (см^2).

Ответ. $125 см^2$.

Задача 9. (16 баллов)

Найдите все значения параметра b, при которых уравнение $9^x + (b^2 + 6) \cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$ не имеет решений.

Решение.

$9^x + (b^2 + 6) \cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$,

$(3^x)^2 + (b^2 + 6) \cdot 3^x - b^2 + 16 = 0$.

Пусть $3^x = t$, $t > 0$.

$t^2 + (b^2 + 6) \cdot t - b^2 + 16 = 0$.

$D = (b^2 + 6)^2 - 4(16 - b^2) = b^4 + 12b^2 + 36 - 64 + 4b^2 = b^4 + 16b^2 - 28 = (b^2 + 8)^2 - 92$.

1) Уравнение $t^2 + (b^2 + 6) \cdot t - b^2 + 16 = 0$ не будет иметь решения, если $D < 0$, т.е.

$(b^2 + 8)^2 - 92 < 0$,

$(b^2 + 8 - \sqrt{92})(b^2 + 8 + \sqrt{92}) < 0$,

$(b^2 - (\sqrt{92} - 8)) < 0$,

$(b - \sqrt{\sqrt{92} - 8})(b + \sqrt{\sqrt{92} - 8}) < 0$,

$b \in (-\sqrt{\sqrt{92} - 8}; \sqrt{\sqrt{92} - 8})$.

ИЛИ.

2) Уравнение $t^2+\left(b^2+6\right)\cdot t-b^2+16=0$ не будет иметь решения, если $t_1+t_2<0$ и $t_1\cdot t_2\geq 0$, т.е. $\begin{cases}16-b^2\geq 0,\\ -\left(b^2+6\right)<0;\end{cases}$ $(b+4)(b-4)\leq 0$, $b\in[-4;4]$.

Таким образом, объединяя два случая, получим, что не будет иметь решения при $b\in[-4;4]$.

Ответ. $[-4;4]$.

Задача 10. (16 баллов)

Известно, что для любого натурального числа n выполняется равенство $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$. Используя его, решить уравнение $(1+3+5+\ldots+(2n+1)):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}\right)=342$.

Решение.

Согласно данному равенству

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{342}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(17+1)(17+2)}=\frac{17+1}{17+2}=\frac{18}{19}.$$

Тогда уравнение примет вид

$$(1+3+5+\ldots+(2n+1)):\frac{18}{19}=342,$$

$$1+3+5+\ldots+(2n+1)=324.$$

В левой части уравнения выделим сумму n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=3$, $a_n=2n+1$ и разностью $d=2$.

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{3+2n+1}{2}\cdot n=\frac{(2n+3)n}{2}=(n+2)n=n^2+2n.$$

Подставляя в уравнение, получим $1+n^2+n=324$, $(n+1)^2=18^2$, $(n+1-18)(n+1+18)=0$, $(n-17)(n+19)=0$

Так как искомое значение n – натуральное число, то решением уравнения является $n=17$.

Ответ. $n=17$.