Задача 1. (4 балла)

НайтиX из пропорции

$$\frac{(20{,}18)^0\cdot X}{10{,}5\cdot\left(\frac{5^2}{6}\right)^{-1}-15{,}15:\left(\frac{2}{15}\right)^{-1}}=\frac{(-3)^2\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:\left(7^{-1}\right)^{-1}}.$$

Решение.

$$\frac{1\cdot X}{10{,}5\cdot\left(\frac{6}{25}\right)-15{,}15\cdot\left(\frac{2}{15}\right)}=\frac{9\cdot\left(\frac{31}{20}-\frac{21}{20}\right)}{\frac{43}{40}-\frac{35}{8}\cdot\frac{1}{7}},$$

$$\frac{X}{\frac{63}{25}-\frac{101}{50}}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{43}{40}-\frac{5}{8}},$$

$$\frac{X}{\frac{1}{2}}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{18}{40}},X=10\cdot\frac{1}{2}=5.$$

Ответ. $X=5$.

Задача2. (4 балла)

Решить уравнение $x^2-5+\frac{2x^2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x^2-2x+1}$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq 1$,

$$x^2-5+\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}=0,$$

$$x^2-5+\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2}{x-1}=0,$$

$$x^2-5+\frac{2(x^2-1)}{x-1}=0,$$

$$x^2-5+2(x+1)=0,$$

$$x^2+2x-3=0,$$

$x_1=1$ не удовлетворяет ОДЗ, $x_2=-3$

Ответ. $x=-3$.

Задача3. (4 балла)

Две материальные частицы, находясь на расстоянии 295 метров одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица продвигается равномерно со скоростью 15м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1м, а в каждую следующую – на 3 м больше, чем в предыдущую. Определите, на какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи.

Решение.

Пусть до встречи частиц прошло t секунд. За это время первая частица прошла $5t$ метров. Для второй частицы пройденное расстояние в зависимости от времени составляет арифметическую прогрессию:

$1, 1+3, 1+3\cdot 2, 1+3\cdot 3, \ldots$

Все расстояние составляет сумму всех членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n = \frac{2\cdot 1 + 3(t-1)}{2}\cdot t$$

Тогда по условию задачи

$$\frac{2\cdot 1 + 3(t-1)}{2}\cdot t + 15t = 295,$$

$$3t^2 + 29t - 590 = 0,$$

$$D = 29^2 + 4\cdot 3\cdot 590 = 7921,$$

$t_1 = \dfrac{-29-89}{6} = -\dfrac{59}{3}$ - не удовлетворяет условию задачи $t \ge 0$.

$t_2 = \dfrac{-29+89}{6} = 10$ с.

Т.е. материальные частицы встретились через 10 секунд.

Тогда за 10 секунд секундная стрелка переместиться на угол $\alpha = \dfrac{360^\circ}{60}\cdot 10 = 60^\circ$.

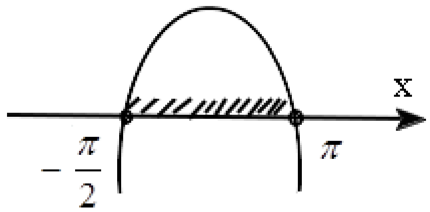
Ответ. $\alpha = 60^\circ$.

Задача 4. (8 баллов)

Найти все корни уравнения $(\sin 2x + \cos 2x + 1)\cdot\sqrt{(\pi - x)\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $(\pi - x)\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) \ge 0$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.



Тогда

$\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$, или $(\pi - x)\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$,

$2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ или $x = \pi$.

$2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$,

$\cos x = 0$ или $\cos x + \sin x = 0$.

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Учитывая ОДЗ, $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$

$\cos x + \sin x = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$, $\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

Учитывая ОДЗ, $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

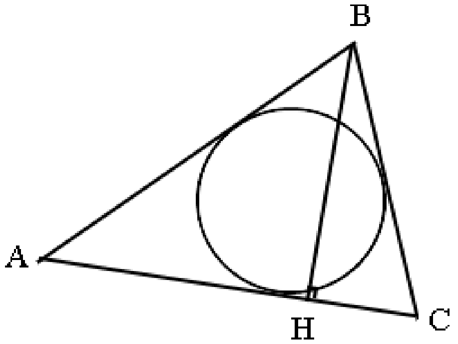
Таким образом, уравнение имеет корни $\left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$.

Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$.

Задача5. (8 баллов)

Найти радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник ABC, если высота BH равна 12, $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{4}{5}$.

Решение.



По условию $\sin A = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{4}{5}$, $BH = 12$.

Имеем $\sin A = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{12}{13} = \frac{12}{AB} \Rightarrow AB = 13$.

$\sin C = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{12}{BC} = \frac{4}{5} \Rightarrow BC = 15$.

Рассмотрим ΔBHC, $\angle H = 90^\circ$.

По теореме Пифагора $HC = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.

Рассмотрим ΔBHA, $\angle H = 90^\circ$.

По теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

$AC = AH + HC = 5 + 9 = 14$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 14 = 84$.

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{84}{\frac{14+15+13}{2}} = 4$.

Ответ. 4.

Задача6. (12 баллов)

Найти значение выражения A, если

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2017^2}\right).$$

Решение.

$$A = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2017^2}\right)$$

Упростим это выражение.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2017^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9-1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2017^2-1}{2017^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2017^2-1}{2017^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\ldots\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016^2}\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}.$$

Полученное выражение можно сократить на произведение
$2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 2016^2\cdot 2017$.

Тогда $A=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\ldots\cdot\frac{2015\cdot 2017}{2016^2}\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}=\frac{2018}{2\cdot 2017}=\frac{2018}{4034}$.

Ответ. $A=\frac{2018}{4034}$**.**

Задача7. (12 баллов)

В компьютерном магазине за два дня продали 2 одинаковых монитора, 13 принтеров и один сканер, причем в первый день была выручена та же сумма, что и во второй. Принтер дешевле монитора и дороже сканера на одну и ту же сумму. Сколько принтеров и сколько мониторов продали в один день со сканером?

Решение.

Допустим, что в один день сосканером продано P мониторов и L принтеров. Тогда в другой день было продано $2-P$ и $13-L$ мониторови принтеровсоответственно. Если c − цена принтера, учитывая, что принтерна s $(0<s<c)$ дороже сканера, то цена равна сканера $c-s$, а цена монитора равна $c+s$, а из условия задачи следует, что

$P(c+s)+Lc+(c-s)=(2-P)(c+s)+(13-L)c$,

$(14-2L-2P)c=(2P-3)s$.

Число P может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть $P=0$, тогда из уравнения $(14-2L-2P)c=(2P-3)s$ получим $(14-2L)c=-3s$, $(2L-14)c=3s$.

Так как $0<s<c$, следовательно, $0<(2L-14)c<3c$, $0<2L-14<3$, $14<2L<17$, $7<L<8{,}5$. Единственное целое число L, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае $P=1$ уравнение $(14-2L-2P)c=(2P-3)s$ эквивалентно $(12-2L)c=-s$, $(2L-12)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(2L-12)c<c$, $0<2L-12<1$, $12<2L<13$, $6<L<6{,}5$. Очевидно, что никакое целое число при $P=1$ не удовлетворяет получившемуся неравенству.

При $P=2$ получим $(14-2L-2P)c=(2P-3)s$, $(10-2L)c=s$. Так как $0<s<c$, то $0<(10-2L)c<c$, $0<10-2L<1$, $-1<2L-10<0$, $9<2L<10$, $4{,}5<L<5$. Т.е., при $P=2$ неравенствоне выполняется ни при каких целых L.

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $P=0, L=8$. Значит, в один день со сканером продано 8 принтеров и ни одного монитора.

Ответ. В один день со сканером продано 8 принтеров и ни одного монитора.

Задача8. (16 баллов)

Найти значение выражения A, если $A=tg\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение.

$$tg\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=tg\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)=$$

$$=\frac{1-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}=\frac{1-\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}{-\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)-1}{\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}=\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}-1}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}{2}}-1}{\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)}{2}}}=\left[\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}}-1}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{2}}}=\frac{\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{5}}{2}}-1}{\sqrt{\dfrac{1+\frac{3}{5}}{2}}}=\frac{\sqrt{\frac{2}{10}}-1}{\sqrt{\frac{8}{10}}}=\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4}{5}}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ответ. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Задача9. (16 баллов)

Найтизначения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x^2+y^2=2(10+a),\\(x+y)^2=50\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

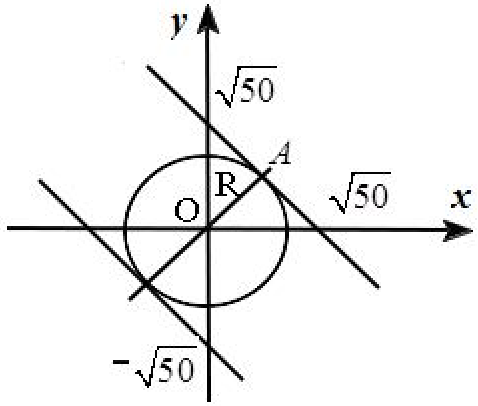
Построим график функции, описываемой вторым уравнением.

Это две прямые: $|x+y|=\sqrt{50}\Rightarrow x+y=\pm\sqrt{50}$;

$$\left[\begin{array}{l}y=-x+\sqrt{50}\\y=-x-\sqrt{50}\end{array}\right..$$

Первое уравнение системы описывает окружность с радиусом $R=\sqrt{2(10+a)}$, $a>-10$ и центром в точке O(0;0).

Исходная система имеет равно два решения, если графики функций будут иметь две общие точки, т.е. прямые будут касаться окружности. Тогда расстояние от начала координат до каждой из прямой равно радиусу окружности. Так как прямые отсекают в первой и третьей четвертях прямоугольные равнобедренные треугольники, то точки касания – середины отрезков прямых в этих четвертях.



Найдем координаты середины отрезков $A\left(\frac{\sqrt{50}}{2};\frac{\sqrt{50}}{2}\right)$.

$R=|OA|$, $\sqrt{2(10+a)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2}$,

$\sqrt{2(10+a)}=5$,
$2(10+a)=25$,
$10+a=12{,}5$;
$a=2{,}5$.

Ответ. $a=2{,}5$.

Задача10. (16 баллов)

Решите неравенство $\frac{1}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}>2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}2x+2\sqrt{2x-1}>0,\\ 2x-1\geq 0.\end{cases}$ $x>\frac{1}{2}$.

Выполним преобразование левой части неравенства.

$$\frac{1}{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}>2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}}>2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2}}>2,$$

$$\frac{1}{\left|\sqrt{2x-1}+1\right|}+\frac{1}{\left|\sqrt{2x-1}-1\right|}>2,$$

Обозначим $\sqrt{2x-1}=t$, $t\geq 0$.

Тогда

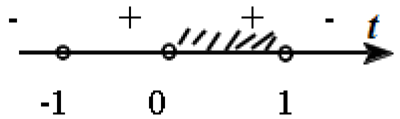
$$\frac{1}{|t+1|}+\frac{1}{|t-1|}>2,\ t\geq 0, t\neq 1.$$

$$\frac{|t-1|+|t+1|-2|t+1||t-1|}{|t+1||t-1|}>0.$$

С учетом ОДЗ решаем неравенство на двух промежутках.

1. $t\in(0;1)$

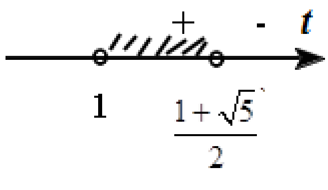
$$\frac{-t+1+t+1-2(-t+1)(t+1)}{(-t+1)(t+1)}>0,\ \frac{2t^2}{(-t+1)(t+1)}>0$$



Таким образом, $t\in(0;1)$.

2. $t\in(1;+\infty)$

$$\frac{t-1+t+1-2(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(t-1)(t+1)}>0$$



Таким образом, учитывая, что $t\in(1;+\infty)$, решениембудет промежуток $t\in\left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.

Возвращаясь к переменной x, получим совокупность неравенств.

$$\left[\begin{array}{l}0<\sqrt{2x-1}<1,\\ 0<\sqrt{2x-1}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}0<2x-1<1,\\ 0<2x-1<\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}1<2x<2,\\ 1<2x<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}<x<1,\\ \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right..$$

Таким образом, $x \in \left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{4}\right)$.