Задача 1. (4 балла)

Найти число A, если 10% от этого числа равно значению выражения B, если

$$B=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}}\cdot(2{,}017)^{0}\cdot\sqrt{0{,}36}.$$

Решение.

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0{,}2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}}\cdot(2{,}017)^{0}\cdot\sqrt{0{,}36}=$$

$$=\frac{3^{10}\cdot 3^{-9}+5^{4}\cdot 5^{-4}+64^{\frac{1}{3}}}{2+\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}}\cdot 1\cdot 0{,}6=$$

$$=\frac{3+1+4}{4+2\cdot\sqrt{4-3}}\cdot 0{,}6=\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{10}=0{,}8.$$

Если 10% от числа 0,8, то число равно $\frac{0{,}8\cdot 100}{10}=8$.

Ответ. 8.

Задача 2. (4 балла)

Четыре насоса одинаковой производительности, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера другого объема за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

Решение.

Пусть один насос наполняет первый танкер за x часов, а второй танкер – за y часов. Тогда четыре насоса, работая вместе, наполнят первый танкер за $\frac{x}{4}$ часов, а второй – за $\frac{y}{4}$ часов.

Получим систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4}\cdot\frac{1}{3}=11, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=18. \end{cases}$

$\begin{cases} 3x+y=11\cdot12, \\ 4x+3y=18\cdot12; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x+y=11\cdot12, \\ x+2y=7\cdot12; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7\cdot12-2y, \\ 3(7\cdot12-2y)+y=11\cdot12. \end{cases}$

Из второго уравнения системы

$21\cdot12-6y+y=11\cdot12$,

$5y=10\cdot12$,

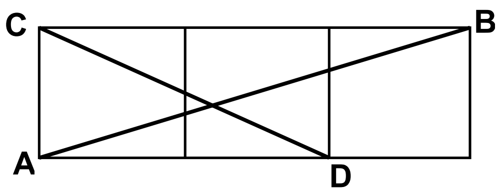
$y=24$.

Следовательно, три насоса могут наполнить второй танкер за $24:3=8$ часов.

Ответ.8.

Задача 3. (4 балла)

Три квадрата расположены так как показано на рисунке. Найти величину угла между прямыми AB и CD.

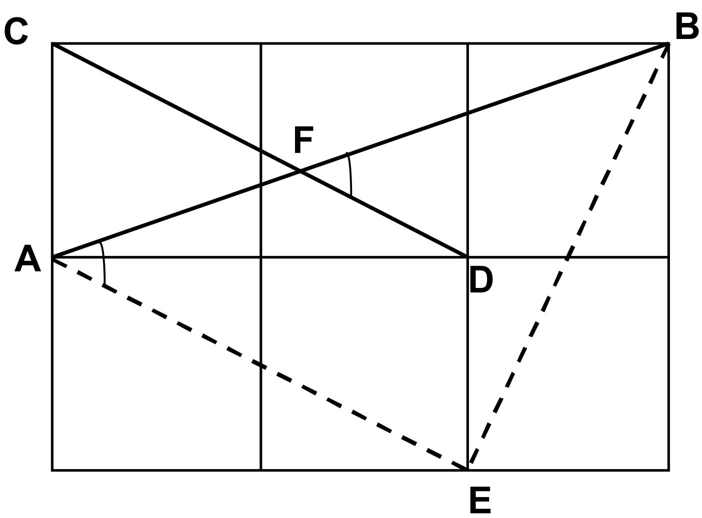


Решение.

I способ.

Пусть сторона квадрата равна x, тогда $AE=BE=x\sqrt{5}$ и

$AB=\sqrt{5x^2+5x^2}=x\sqrt{10}$.



Из ΔABE, где $\angle BAE = \angle ABE = \alpha$, $\angle AEB = \beta$, по теореме косинусов имеем $10x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2x\sqrt{5}\cos\beta$, т.е. $\cos\beta = 0$, значит $\beta = 90°$. Тогда $\angle BAE = \angle ABE = 45°$.

II способ.

Можно применить скалярное произведение векторов AB и CD.

Ответ. $45°$**.**

Задача 4. (8 баллов)

Решить уравнение $\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x$.

Решение.

ОДЗ. $\begin{cases}1+x\ge 0,\\ 1-x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge -1,\\ x\le 1;\end{cases}$ $-1\le x\le 1$.

Умножим обе части уравнения на $\left(\sqrt{1+x}+1\right)$.

$\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$,

$x\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\frac{1}{4}x\left(\sqrt{1+x}+1\right)$,

$4x\left(\sqrt{1-x}+1\right)-x\left(\sqrt{1+x}+1\right)=0$,

$x\left(4\left(\sqrt{1-x}+1\right)-\left(\sqrt{1+x}+1\right)\right)=0$.

$x=0$ или $4\left(\sqrt{1-x}+1\right)-\left(\sqrt{1+x}+1\right)=0$.

$4\sqrt{1-x}+3=\sqrt{1+x}$,

$\left(4\sqrt{1-x}+3\right)^2=\left(\sqrt{1+x}\right)^2$,

$16-16x+24\sqrt{1-x}+9-1-x=0$,

$24\sqrt{1-x}=17x-24$,

$24^2(1-x)=289x^2-2\cdot 17\cdot 24x+24^2$,

$289x^2-240x=0$,

$x(289x-240)=0$,

$x=0$ или $289x-240=0$.

$x_1=0$ или $x_2=\frac{240}{289}$.

Ответ. $x_1=0$**,** $x_2=\frac{240}{289}$**.**

Задача 5. (8 баллов)

Доказать тождество $tg15°\cdot tg25°\cdot tg35°\cdot tg85°=1$.

Решение.

I способ

$tg15° \cdot tg25° \cdot tg35° \cdot tg85° = 1$,

$\dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} \cdot \dfrac{\sin 25°}{\cos 25°} \cdot \dfrac{\sin 35°}{\cos 35°} \cdot \dfrac{\sin 85°}{\cos 85°} = 1$,

$\sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 85° = \cos 15° \cdot \cos 25° \cdot \cos 35° \cdot \cos 85°$,

$\dfrac{1}{2}(\sin 10° - \sin 40°) \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 50° - \cos 120°) = \dfrac{1}{2}(\cos 10° + \cos 40°) \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 50° + \cos 120°)$,

Раскрыв скобки и приведя подобные, получаем

$\cos 10° \cdot \cos 120° = -\cos 40° \cdot \cos 50°$,

$-\cos 10° \cdot \sin 30° = -\sin 50° \cdot \cos 50°$,

$-\dfrac{1}{2}\cos 10° = -\dfrac{1}{2}\sin 100°$,

$-\dfrac{1}{2}\cos 10° = -\dfrac{1}{2}\cos 10°$,

$1 = 1$.

Следовательно, тождество $tg15° \cdot tg25° \cdot tg35° \cdot tg85° = 1$ доказано.

II способ

Заметим, что $tg25° \cdot tg35° = tg(30° - 5°) \cdot tg(30° + 5°) =$

$$= \frac{tg30° - tg5°}{1 + tg30° \cdot tg5°} \cdot \frac{tg30° + tg5°}{1 - tg30° \cdot tg5°} =$$

$$= \frac{tg^2 30° - tg^2 5°}{1 - tg^2 30° \cdot tg^2 5°} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - tg^2 5°}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot tg^2 5°} = \frac{1 - 3tg^2 5°}{3 - tg^2 5°}.$$

Кроме того, $tg15° = \dfrac{\sin 15°}{\cos 15°} = \dfrac{\sin(3 \cdot 5°)}{\cos(3 \cdot 5°)} = \dfrac{3\sin 5° - 4\sin^3 5°}{4\cos^3 5° - 3\cos 5°} =$

$$= \frac{\sin 5°\left(3 - 4\sin^2 5°\right)}{\cos 5°\left(4\cos^2 5° - 3\right)} = tg5° \cdot \frac{3 - 4\left(1 - \cos^2 5°\right)}{4\cos^2 5° - 3} = tg5° \cdot \frac{4\cos^2 5° - 1}{4\cos^2 5° - 3} =$$

$$= \frac{\sin 5°\left(3 - 4\sin^2 5°\right)}{\cos 5°\left(4\cos^2 5° - 3\right)} = tg5° \cdot \frac{3 - 4\left(1 - \cos^2 5°\right)}{4\cos^2 5° - 3} = tg5° \cdot \frac{4\cos^2 5° - 1}{4\cos^2 5° - 3} =$$

$$= tg5° \cdot \frac{4\frac{1}{1+tg^2 5°}-1}{4\frac{1}{1+tg^2 5°}-3} = tg5° \cdot \frac{3-tg^2 5°}{1-3tg^2 5°}.$$

Следовательно, $tg15° \cdot tg25° \cdot tg35° \cdot tg85° = tg5° \cdot \frac{3-tg^2 5°}{1-3tg^2 5°} \cdot \frac{1-3tg^2 5°}{3-tg^2 5°} \cdot tg85° =$

$$tg15° \cdot tg85° = tg5° \cdot ctg5° = 1.$$

Что требовалось доказать.

Задача 6. (12 баллов)

Два города A и B находятся на расстоянии 75 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают навстречу друг другу два велосипедиста и едут, не останавливаясь, один – со скоростью 12 км/ч, другой – со скоростью 13 км/ч. У одного из велосипедистов есть собака, которая в момент начала движения побежала от своего хозяина к другому велосипедисту со скоростью 15 км/ч. Встретив его, она сразу поворачивает к хозяину. Повстречав хозяина, опять бежит обратно навстречу другому велосипедисту. Собака бегала от одного велосипедиста к другому до тех пор, пока они не встретились. Сколько километров пробежала собака?

Решение.

Не пускаясь в тонкие и сложные выкладки, заметим, что собака была в пути (бегала от одного велосипедиста к другому) до тех пор, пока велосипедисты не встретились. А велосипедисты встретились через 3 часа, т.е. $75:(12+13)=3$.

Следовательно, собака была в пути 3 часа и за это время пробежала $3 \cdot 15 = 45$ километров.

Ответ. 45 км.

Задача 7. (12 баллов)

Решить неравенство $\sqrt{6x-x^2-5} - \sqrt{7-2x} \geq \sqrt{8x-x^2-12}$.

Решение.

I способ

ОДЗ.

$$\begin{cases} 6x-x^2-5 \geq 0, \\ 7-2x \geq 0, \\ 8x-x^2-12 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in [1;5], \\ x(-\infty;3,5], \\ x \in [2;6]; \end{cases} x \in [2;3,5].$$

$\sqrt{6x-x^2-5} \geq \sqrt{8x-x^2-12} + \sqrt{7-2x}$,

$\left(\sqrt{6x-x^2-5}\right)^2 \ge \left(\sqrt{8x-x^2-12}+\sqrt{7-2x}\right)^2$,
$6x-x^2-5 \ge 8x-x^2-12+2\sqrt{8x-x^2-12}\sqrt{7-2x}+7-2x$,
$2\sqrt{8x-x^2-12}\sqrt{7-2x} \le 0$.
Следовательно, $8x-x^2-12=0$ или $7-2x=0$.
Учитывая ОДЗ, $x_1=2, x_2=3{,}5$.

II способ

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{6x-x^2-5} \ge \sqrt{8x-x^2-12}+\sqrt{7-2x}$.
Обозначим $8x-x^2-12=a$, $7-2x=b$, где $a \ge 0, b \ge 0$.
Представим $6x-x^2-5=(8x-x^2-12)+(7-2x)$.
Тогда неравенство примет вид $\sqrt{a+b} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Возведем обе части неравенства в квадрат: $a+b \ge a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Откуда $\sqrt{ab} \le 0$, $ab=0$.
Следовательно, имеем две смешанные системы:

$$\begin{cases} 8x-x^2-12=0, \\ 7-2x \ge 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8x-x^2-12 \ge 0, \\ 7-2x=0. \end{cases}$$

Из первой системы $8x-x^2-12=0$, $x_1=2$, $x_2=6$. Так как $x \le 3{,}5$, то $x=2$.
Из второй системы $7-2x=0$ $x=3{,}5$. Так как $8x-x^2-12 \ge 0$, $2 \le x \le 6$, то $x=3{,}5$.

Ответ. $x_1=2, x_2=3{,}5$.

Задача 8. (16 баллов)

Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos x+\cos y=\sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x-\cos y}=\cos x. \end{cases}$

Решение.

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x>0$, тогда получим:

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=\sin^2 x, \\ \sin x-\cos y=\cos^2 x. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем $\sin x+\cos x=1$,

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=1,$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=1,$$

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Если $n=2k$, то $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi k$. Откуда $x_1=2\pi k, k\in Z$.

Если $n=2k+1$, то $x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi$. Откуда $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$.

Подставляя найденные значения x в первое уравнение системы, найдем y.

Если $x_1=2\pi k, k\in Z$, то $1+\cos y=0$, $\cos y=-1$, $y=\pi+2\pi m, m\in Z$.

Если $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$, то $\cos y=1$, $y=2\pi l, l\in Z$.

Следовательно, исходная система имеет два решения:

$(2\pi k;\pi+2\pi m)$ и $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi l\right)$, $k.m,l\in Z$.

Ответ. $(2\pi k;\pi+2\pi m)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;2\pi l\right)$, $k.m,l\in Z$.

Задача 9. (16 баллов)

Решить уравнение

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2016)}+$$
$$+\frac{1}{(x+2016)(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)(x+2018)}=\frac{1}{999999}.$$

Решение.

Воспользуемся равенством $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ и преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{1}{(x+2014)}-\frac{1}{(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)}-\frac{1}{(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)}-$$
$$-\frac{1}{(x+2017)}+\frac{1}{(x+2017)}-\frac{1}{(x+2018)}=\frac{1}{999999},$$

$$\frac{1}{(x+2014)}-\frac{1}{(x+2018)}=\frac{1}{999999},$$
$$\frac{4}{(x+2014)(x+2018)}=\frac{1}{999999}.$$
Пусть $x+2016=y$.
$$\frac{4}{(y-2)(y+2)}=\frac{1}{999999},$$
$$\frac{4}{y^2-4}=\frac{1}{999999},$$
$$y^2-4=999999\cdot 4,$$
$$y^2=999999\cdot 4+4,$$
$$y^2=10^6\cdot 4,$$
$$(x+2016)^2-10^6\cdot 4=0,$$
$$(x+2016-2000)(x+2016+2000)=0,$$
$$(x+16)(x+4016)=0,$$
$$x_1=-16,\ x_2=-4016.$$

Ответ. $x_1=-16$**,** $x_2=-4016$**.**

Задача 10. (16 баллов)
Найти все такие значения x, при которых неравенство $(2a-6)x^2+(32-10a)x-a-8<0$ выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $2<a<4$.

Решение.

Преобразуем неравенство, записав его в виде $(2x^2-10x-1)a-6x^2+32x-8<0$. Полученное неравенство линейное относительно a. Рассмотрим функцию $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$, $f(a)<0$, где $k(x)=2x^2-10x-1$, $b(x)=-6x^2+32x-8$.

Так как $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$ – линейная относительно a, условие ее отрицательности на $(2;4)$ равносильно системе $\begin{cases} f(2)\le 0, \\ f(4)\le 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 2\cdot\left(2x^2-10x-1\right)-6x^2+32x-8\le 0, \\ 4\cdot\left(2x^2-10x-1\right)-6x^2+32x-8\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-6x+5\ge 0, \\ x^2-4x-6\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)\ge 0, \\ (x-2)^2-10\le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[5;+\infty), \\ x\in\left[2-\sqrt{10};2+\sqrt{10}\right]; \end{cases}$$

$$x\in\left[2-\sqrt{10};1\right]\cup\left[5;2+\sqrt{10}\right]$$

Ответ. $\left[2-\sqrt{10};1\right]\cup\left[5;2+\sqrt{10}\right]$.