Вариант 2-1

1. Найти x, если $1\frac{1}{6}+1\frac{5}{6}\cdot\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-2{,}5$.

Решение.

$\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=(-2{,}5-\frac{7}{6})\cdot\frac{6}{11}$, $\left(x:1{,}8-\frac{3}{2}\cdot 2{,}02\right)=-2$, $x:1{,}8=-2+\frac{3}{2}\cdot 2{,}02$,

$x:1{,}8=-2+3{,}03 \qquad x:1{,}8=1{,}03 \qquad x=1{,}854$

Ответ: 1,854.

2. Упростить до числа $\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{a^2b-b^3}:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$.

Решение.

$$\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{a^2b-b^3}:\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{b(a^2-b^2)}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}=\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{a^3+b^3}{ab(a+b)}=$$

$\frac{(a^2+b^2)(a+b)-a^3-b^3}{ab(a+b)}=\frac{a^2b+ab^2}{ab(a+b)}=1.$ **Ответ:** 1.

3. Сумма цифр двузначного числа равна 12, а разность числа единиц и числа десятков в этом числе в 12 раз меньше самого числа. Найти это число.

Решение.

Двузначное число 10x+y. По условию x+y=12, (y-x)12=10x+y. Решаем систему уравнений : x=4, y=8, число 48.

Ответ: 48.

4. Вычислить сумму прогрессии

$\frac{1}{2}+\frac{7}{6}+\frac{11}{6}+...+\frac{59}{6}$.

Решение.

Арифметическая прогрессия $a_1=1/2$, $d=2/3$, $a_n=59/6$, $a_n=a_1+d(n-1)$,

отсюда n=15. Сумма арифметической прогрессии: $(a_n+a_1)n/2=77{,}5$.

Ответ: 77,5

5. Решить уравнение $\sqrt{7-3x}-\sqrt{6-x}=3$.

Решение.

$7-3x\ge 0, \quad 6-x\ge 0$.

$\sqrt{7-3x}=3+\sqrt{6-x}$, $7-3x=9+6\sqrt{6-x}+6-x$. $-8-2x=6\sqrt{6-x}$. $-4-x=3\sqrt{6-x}$

$-4-x\ge 0$, $16+8x+x^2=54-9x$, $17x+x^2-38=0$, x1=2 (не подходит), x2 = –19.

Ответ: –19.

6. Решить неравенство: $\dfrac{x+2}{5x+1}<-x-4$. В ответ записать наибольшее целое решение x.

Решение. $\dfrac{x+2}{5x+1}+x+4<0$, $\dfrac{x+2+(5x+1)(x+4)}{5x+1}<0$, $\dfrac{x+2+(5x+1)(x+4)}{5x+1}<0$

$\dfrac{5x^2+22x+6}{5x+1}<0$, $5x^2+22x+6=0$, найдем корни, $x_1=(-11-\sqrt{91})/5\approx-4{,}1;$

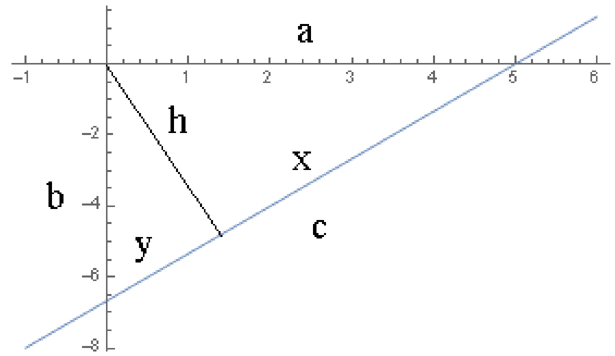
$x_2=(-11+\sqrt{91})/5\approx-0{,}29;$ $5x+1=0$, $x_3=-1/5=-0{,}2;$

На оси: x_1 x_2 x_3, знаки - + - +, $x\le(-11-\sqrt{91})/5$ и $(-11+\sqrt{91})/5\le x<-1/5$.

Отсюда наибольшее целое решение $x=-5$. **Ответ**: –5.

7. Найти кратчайшее расстояние от начала координат до прямой: $4x-3y=20$.

Решение. Пусть h – высота.



Решим систему из двух уравнений $x+y=c,\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{a^2}{b^2},\ a=5,\ b=20/3.$

Найдем $x=3,\ y=16/3$. Так как $h^2=x\cdot y$, расстояние до прямой равно h=4. **Ответ**: 4.

8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение $\dfrac{x^2-ax+2a-4}{(x-3)(x+7a)}=0$. В ответ записать наибольшее значение параметра a.

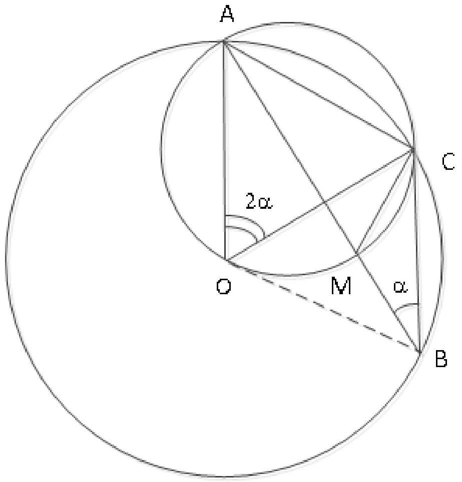
Решение

$\dfrac{(x-2)(x-a+2)}{(x-3)(x+7a)}=0$. $(x-2)(x-a+2)=0,\quad (x-3)\ne0,\ (x+7a)\ne0.$

Ответ: 5

9. Дана окружность с центром в точке О радиусом 6. На хорде АВ взята точка М. Через точки А, О и М проведена вторая окружность, пересекающая первую в точке С. Найдите ВМ, если АС=$4\sqrt{5}$, а ВС=4.

Решение. Дано: OB=OA=OC=R=6, AC=$4\sqrt{5}$, BC=4. Найти: BM.



Обозначим $\alpha = \angle ABC$.
$\angle$ AOC=2$\angle$ABC=2α (опираются на дугу AC большой окружности);
$\angle$AMC=$\angle$AOC (опираются на дугу AC маленькой окружности);
$\angle$AOC =$\angle$AMC =$\angle$ABC+$\angle$BCM (внешний угол треугольника BCM).
Следовательно, $\angle$ABC=$\angle$BCM и BM=MC.
$BC = 2R\sin\angle\mathrm{BAC}$, $MC = 2r\sin\angle\mathrm{BAC}$ (R $-$ радиус большой окружности, r $-$ радиус маленькой), по теореме синусов.
$\frac{BC}{MC} = \frac{R}{r}$,
$AC = 2R\sin\alpha$, $\sin\alpha = \frac{AC}{2R} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$.
$AC = 2r\sin 2\alpha$, $2R\sin\alpha = 2r\sin 2\alpha \implies \frac{R}{r} = 2\cos\alpha = \frac{4}{3}$.

$\frac{BC}{MC} = \frac{4}{3} \implies MC = 3$. Следовательно, BM=MC=3. **Ответ**: BM=3.

10. Решить уравнение в целых положительных числах $2x^2 + xy - y^2 - 3y = 110$.
Решение

$2x^2 + xy - y^2 - 3y - 2 = 108$, рассмотрим $2x^2 + xy - y^2 - 3y - 2 = 0$, решим его как квадратное уравнение относительно y, получим $y = -x - 1$, $y = 2x - 2$. Тогда
$(1 + x + y)(2x - y - 2) = 108$, оба множителя целые положительны. $108 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$,
Подходит разложение 108=54·2, $(1 + x + y) = 54$, $(2x - y - 2) = 2$, отсюда $x = 19$, $y = 34$.
Ответ $x = 19$, $y = 34$

Вариант 2-2

Задачи 1, 2, 4, 5 решаются аналогично варианту 2-1.

1. Найти *x*, если $\dfrac{\dfrac{5}{4}+\dfrac{9}{20}}{23-x}=\dfrac{2{,}5+\dfrac{1}{3}}{21{,}25}$.

Ответ: 10,25

2. Упростить и вычислить при $x=0{,}2$; $y=0{,}3$:

$\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y\cdot(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

Ответ: 2

3. Половину пути мотоциклист ехал со скоростью 45 км/ч, затем задержался на 10 мин, а поэтому, чтобы наверстать потерянное время, он увеличил скорость на 15 км/ч. Найти весь путь мотоциклиста.

Решение.

45 t=60(t-1/6), отсюда t=2/3, весь путь равен 45·2/3·2=60. **Ответ**: 60.

4. Вычислить сумму прогрессии

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{11}{12}+\dfrac{7}{6}+\ldots+\dfrac{59}{12}$.

Ответ: 50,25

5. Решить уравнение $\sqrt{17-x}-\sqrt{8+x}=1$.

Ответ: 1

6. Решить неравенство: $\dfrac{7x-1}{3x-2}<3x-1$. В ответ записать наименьшее целое решение x.

Решение:

$\dfrac{7x-1}{3x-2}-3x+1<0,\ \dfrac{9x^2-16x+3}{3x-2}>0$

$3x-1\neq 0,\ 9x^2-16x+3=0$,

найдем корни, $x_1=(8-\sqrt{37})/9\approx 0{,}21$; $x_2=(8+\sqrt{37})/9\approx 1{,}56$;

обозначим $x_3=1/3\approx 0{,}333$;

На оси: x_1 x_3 x_2, знаки - + - +, $(8-\sqrt{37})/9<x<1/3$ и $x>(8+\sqrt{37})/9$.

Ответ: 2

7. Найти кратчайшее расстояние от начала координат до прямой: $4x+3y=35$.

Решение. Пусть h – высота.

Решим систему из двух уравнений $x+y=c, \frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}, a=-35/4, b=-35/3.$

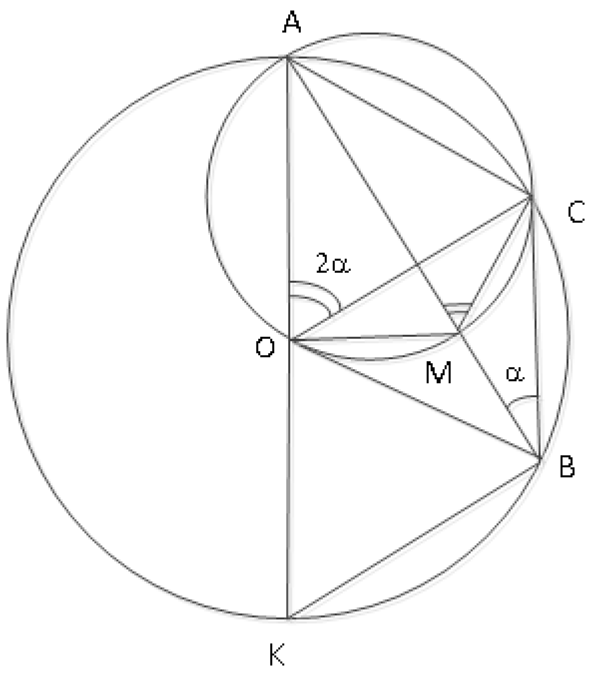
Найдем $x=21/4,\ y=28/3$. Так как $h^2=x\cdot y$, расстояние до прямой равно h=7. **Ответ**: 7.

8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение $\frac{x^2-ax-a-1}{(x+4)(x+a)}=0$. В ответ записать наименьшее значение параметра a.

Ответ: -5

9. Точка О – центр окружности радиуса 5. На хорде АВ этой окружности взята точка М такая, что МО=МВ=МС, где С – точка, лежащая на той же окружности. Найдите ВС, если АВ=8.

Решение.



$BM=MC\ \Rightarrow$ треугольник ВМС – равнобедренный $\Longrightarrow \angle ABC=\angle MCB=\alpha$,

$\angle AMC=\ \angle ABC+\angle MCB=2\angle ABC$ (внешний угол треугольника ВСМ).

$\angle$ АОС=2$\angle$АВС=2α (опираются на дугу АС большой окружности);

Следовательно, $\angle AOC=2\angle ABC=\ \angle AMC.$

Из этого следует, что точки А, О, М и С лежат на одной окружности.

Продолжим радиус АО до диаметра АК. Докажем, что треугольники СОВ и ОКВ равны. Для этого достаточно показать, что углы ОСВ и ОКВ равны.

$\angle ABC=\angle MCB=\alpha, \angle AOC=2\alpha,$

$\angle OAC=\frac{180°-2\alpha}{2}=90°-\alpha,$ (треугольник АОС – равнобедренный).

$OM=MC$ по условию, $\Longrightarrow$ дуги OM и MC также равны, а из этого следует, что $\angle MAC=\angle MAO=\angle MCO=45°-\frac{\alpha}{2},$ (опираются на равные дуги маленькой окружности).

Таким образом,

$\angle OCB=\alpha+45°-\frac{\alpha}{2}=45°+\frac{\alpha}{2}.$ Из прямоугольного треугольника АВК найдем $\angle OKB=90°-\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)=\ 45°+\frac{\alpha}{2}. \angle OCB=\angle OKB\ \Rightarrow CB=KB.$

$BK^2 = AK^2 - AB^2 = 100 - 64 = 36. CB = KB = 6.$

Ответ: BC=6

10. Решить уравнение в целых положительных числах $2x^2 + xy - y^2 + 3x = 107$.

Решение

$2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 108$, рассмотрим $2x^2 + xy - y^2 - 3x + 1 = 0$, решим его как квадратное уравнение относительно y, получим $y = -x - 1$, $y = 2x + 1$. Тогда $(1 + x + y)(2x - y + 1) = 108$, оба множителя целые положительны. $108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$,

Подходит разложение 108=54·2, $(1 + x + y) = 54, (2x - y - 2) = 2$, отсюда $x = 18, y = 35$.

Ответ: $x = 18, y = 35$.