Математика. 10-11 класс.

Вариант-32

Задача 1. (4 балла)

НайтиX из пропорции

$$\frac{1{,}2:0{,}375+(-5)^{-1}}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+\left((0{,}8)^{-1}\right)^{-1}}=\frac{\left(\frac{5^3}{2}\right)^{-1}:0{,}12+0{,}7\cdot(20{,}18)^0}{X\cdot 3^{-2}}.$$

Решение.

$$\frac{1{,}2:0{,}375+(-5)^{-1}}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+\left((0{,}8)^{-1}\right)^{-1}}=\frac{\left(\frac{5^3}{2}\right)^{-1}:0{,}12+0{,}7\cdot(20{,}18)^0}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{12}{10}:\frac{375}{1000}-5^{-1}}{\frac{6\cdot 25+4}{25}:\frac{15\cdot 5+2}{5}+0{,}8^{(-1)\cdot(-1)}}=\frac{\left(\frac{125}{2}\right)^{-1}:\frac{12}{100}+\frac{7}{10}\cdot 1}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{12}{10}\cdot\frac{1000}{375}-\frac{1}{5}}{\frac{154}{25}:\frac{77}{5}+0{,}8^1}=\frac{\frac{2}{125}:\frac{12}{100}+\frac{7}{10}}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{12}{375}\cdot\frac{1000}{10}-\frac{1}{5}}{\frac{154}{25}\cdot\frac{5}{77}+0{,}8}=\frac{\frac{2}{125}\cdot\frac{100}{12}+\frac{7}{10}}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{4}{125}\cdot\frac{100}{1}-\frac{1}{5}}{\frac{154}{77}\cdot\frac{5}{25}+0{,}8}=\frac{\frac{100}{125}\cdot\frac{2}{12}+\frac{7}{10}}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{1}-\frac{1}{5}}{\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{5}+\frac{8}{10}}=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}+\frac{7}{10}}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{\frac{15}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{\frac{2}{15}+\frac{7}{10}}{X\cdot 3^{-2}},$$

$$\frac{15}{5}:\frac{6}{5}=\frac{\frac{2\cdot 2+7\cdot 3}{30}}{X\cdot\frac{1}{3^2}},$$

$$\frac{15}{5}:\frac{6}{5}=\frac{5}{6}:\frac{X}{9},$$

$$\frac{15}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{X},$$

$$\frac{3}{1}\cdot=\frac{9}{X}, X=3$$

Ответ. $X=3$ **.**

Задача2. (4 балла)

Решить уравнение $\frac{x^2+7}{x-7}-4=\frac{8x}{x-7}$.

Решение.

Найдем область допустимых значений переменной x в данном уравнении:
$x-7\neq 0$, $x\neq 7$.

Решим уравнение.

$$\frac{x^2+7}{x-7}-\frac{4\cdot(x-7)}{x-7}=\frac{8x}{x-7},$$

$$\frac{x^2+7-4\cdot(x-7)}{x-7}=\frac{8x}{x-7},$$

$$x^2+7-4\cdot(x-7)=8x$$

$x^2+7-4x+28-8x=0$, $x^2-12x+35=0$,

$x_1=5$

$x_2=7$ – не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ. $x=5$

Задача3. (4 балла)

В соревнованиях по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получает штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий – на $\frac{1}{2}$ очка больше, чем за предыдущий промах.

Определить, сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков.

Решение.

Начисление количества штрафных очков есть арифметическая прогрессия, где $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{2}$, $S_n = 7$. Тогда необходимо найти $25 - n$, n – количество промахов.

Так как $S_n = 7$, то, зная, что $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, имеем

$$S_n = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot (n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}}{2} \cdot n = \frac{\frac{3}{2} + \frac{n}{2}}{2} \cdot n = \frac{(3+n) \cdot n}{4} = 7.$$

$n^2 + 3n - 28 = 0$, $D = 121$, $n_1 = 4$, $n_2 = -7$.

$n_2 = -7$ не подходит по условиям задачи. Таким образом, зная число промахов, найдем число попаданий: $25 - n = 25 - 5 = 21$.

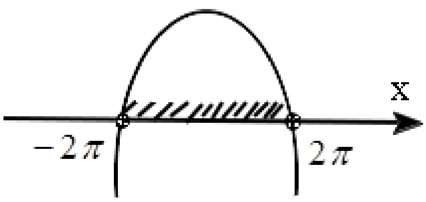
Ответ. 21.

Задача 4. (8 баллов)

Найти все корни уравнения $\frac{\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $4\pi^2 - x^2 > 0$, $x \in (-2\pi;\ 2\pi)$.



Решим уравнение.

$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x + 2 = 0,$$

$$\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) + \sin 2x = -2.$$

Учитывая, что $\cos\left(x + \frac{41\pi}{4}\right) = \cos\left(x + 10\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, получим уравнение: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin 2x=-2$.

Сумма значений тригонометрических функций, косинуса и синуса, равна -2 при минимальных значениях данных функций, т.е. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ и $\sin 2x=-1$, тогда

$$\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1, \\ \sin 2x=-1;\end{cases} \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=\pi+2\pi k,\ k\in Z, \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ l\in Z;\end{cases} \begin{cases}x=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in Z, \\ x=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi l\right),\ \ l\in Z;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in Z, \\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi l,\ \ l\in Z.\end{cases}$$

Определим значения корней $x\in(-2\pi;\,2\pi)$:

$$\begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in Z,\ \text{при}\ k=-1, k=0; \\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi l,\ \ l\in Z,\ \text{при}\ l=-1, l=0, l=1, l=2;\end{cases}$$

, т.е. это корни $\begin{cases}x\in\left\{-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}, \\ x=\left\{-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}.\end{cases}$.

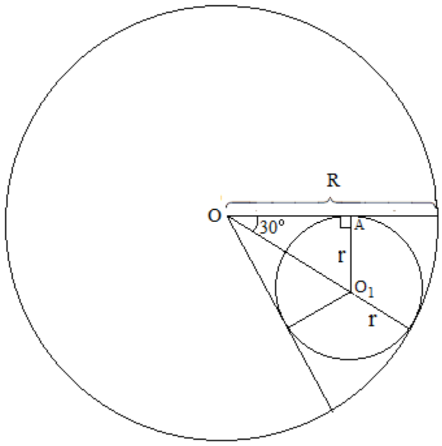
Таким образом, уравнение имеет два корня $x\in\left\{-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Ответ. $x\in\left\{-\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Задача5. (8 баллов)

В круговой сектор, дуга которого содержит 60^0,вписан круг. Найтиотношение площади сектора к площади этого круга.

Решение.



Необходимо найти $\dfrac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}}$.

Известно, что $S_{сектора}=\dfrac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha$, $S_{вписанного\ \ круга}=\pi r^2$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔOO_1A, $O_1A=r$, $\angle O_1OA=30^\circ$, тогда гипотенуза равна $OO_1=2r$.

Тогда радиус большого круга: $R=OO_1+r=3r$.

Таким образом,

$$\frac{S_{сектора}}{S_{вписанного\ \ круга}}=\frac{\frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot 60^\circ}{\pi r^2}=\frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi r^2}=\frac{\pi R^2}{6\pi r^2}=\frac{R^2}{6r^2}=\frac{(3r)^2}{6r^2}=\frac{9r^2}{6r^2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ. 1,5.

Задача6. (12 баллов)

Найти значение выражения A, если

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right).$$

Решение.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right).$$

Упростим это выражение.

$$A=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2018^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{4-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9-1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16-1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\cdot\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\cdot\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2018^2-1}{2018^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}\cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}.$$

Полученное выражение можно сократить на произведение

$2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot 2017^2\cdot 2018$.

Тогда, $A=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2016\cdot 2018}{2017^2}\cdot\frac{2017\cdot 2019}{2018^2}=\frac{2019}{2\cdot 2018}=\frac{2019}{4036}$.

Ответ. $A=\frac{2019}{4036}$.

Задача7. (12 баллов)

В спортивном магазине два покупателя, истратив денег поровну, купили 14 футбольных мячей, 2 баскетбольных мяча и один волейбольный мяч. Футбольныймяч дешевле баскетбольного и дороже волейбольного на одну и ту же сумму. Сколько и каких мячей приобрел тот, кто купил волейбольный мяч?

Решение.

Допустим, что тот, кто купил волейбольный мяч, купил U футбольных мячей и Zбаскетбольных. Тогда другой покупатель купил $14-U$ футбольных мячей и $2-Z$ Баскетбольных. Если c − цена футбольного мяча и она на s $(0<s<c)$ дороже волейбольного, то цена баскетбольного мяча равна $c+s$, а из условия задачи следует, что

$$Z(c+s)+Uc+(c-s)=(2-Z)(c+s)+(14-U)c,$$

$$(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s.$$

Число Z может принимать одно из трех значений: 0, 1 или 2. Рассмотрим по очереди каждое из них.

Пусть $Z=0$, тогда из уравнения $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ получим $(15-2U)c=-3s$, $(2U-15)c=3s$. Так как $0<s<c$, следовательно, $0<(2U-15)c<3c$, $0<2U-15<3$, $15<2U<18$, $7{,}5<U<9$. Единственное целое число U, которое удовлетворяет этому неравенству, равно 8.

В случае $Z=1$уравнение $(15-2U-2Z)c=(2Z-3)s$ эквивалентно $(13-2U)c=-s$, $(2U-13)c=s$. Так как $0<s<c$, то$0<(2U-13)c<c$

$0 < 2U - 13 < 1, 13 < 2U < 14$, $6{,}5 < U < 7$. Очевидно, что никакое целое число U не удовлетворяет получившемуся неравенству.

Рассуждая аналогично при $Z = 2$, получим, что уравнение $(15 - 2U - 2Z)c = (2Z - 3)s$ не выполняется ни при каких целых U, т.е. $(11 - 2U)c = s$, тогда $0 < (11 - 2U)c < c$, $0 < 11 - 2U < 1$, $-1 < 2U - 11 < 0$, $10 < 2U < 11$, $5 < U < 5{,}5$.

Таким образом, описанная в условии задачи ситуация может осуществиться только при $Z = 0$, $U = 8$. Значит, купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Ответ. Купивший волейбольный мяч купил ещё 8 футбольных мячей и ни одного баскетбольного.

Задача8. (16 баллов)

Найти значение выражения A, если $A = tg\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Решение.

$$tg\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \left[\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ |a| \le 1\right] =$$

$$= tg\left(\frac{5}{4}\pi + \frac{1}{4}\cdot\left(\pi - \arccos\frac{4}{5}\right)\right) = tg\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right) = tg\left(\frac{6\pi}{4} - \frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right) =$$

$$= tg\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right) = \left[tg\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha,\ \alpha \ne \pi n, n \in Z\right] = ctg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right) =$$

$$= \left[ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha},\ \alpha \ne \pi n, n \in Z\right] = \frac{1}{tg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1},\ \ \alpha \ne \dfrac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z; \\ \dfrac{4}{5} \in [0;1] \Rightarrow \arccos\dfrac{4}{5} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{4}{5} \in \left(0; \dfrac{\pi}{8}\right) \\ \Rightarrow tg\left(\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{4}{5}\right) > 0 \ \Rightarrow\ tg\alpha = +\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1}. \end{array}\right] =$$

$$=\frac{1}{tg\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)\right)}-1}}=$$

$$=\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}\right]=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\quad \frac{4}{5}\in[0;1]\Rightarrow \arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\\ \Rightarrow\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)>0\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)=+\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}{2}}=\left[\cos(\arccos a)=a,\ |a|\le 1\right]=\\ =\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{1+\frac{3\sqrt{10}}{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20}{10+3\sqrt{10}}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{20-\left(10+3\sqrt{10}\right)}{10+3\sqrt{10}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{10-3\sqrt{10}}\cdot\frac{10+3\sqrt{10}}{10+3\sqrt{10}}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{10^2-\left(3\sqrt{10}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(10+3\sqrt{10}\right)^2}{100-90}}=\frac{10+3\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}+3.$$

Ответ. $\sqrt{10}+3$.

Задача9. (16 баллов)

Найтизначения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=2(7+a),\\ (x+y)^2=50\end{cases}$$ имеет ровно два решения.

Решение.

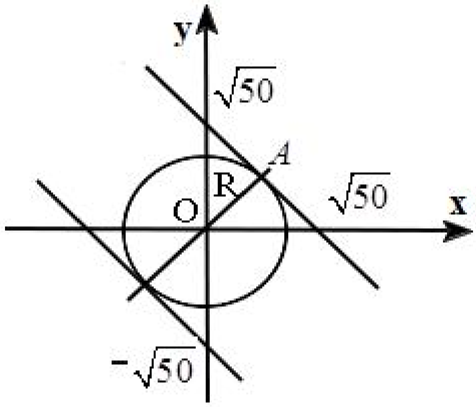
Построим график функции, описываемой вторым уравнением.

Это две прямые: $|x+y|=\sqrt{50} \Rightarrow x+y=\pm\sqrt{50}$;

$$\left[\begin{array}{l} y=-x+\sqrt{50} \\ y=-x-\sqrt{50} \end{array}\right.$$

Первое уравнение системы описывает окружность с радиусом $R=\sqrt{2(7+a)}$, $a>-7$ и центром в точке O(0;0).

Исходная система имеет равно два решения, если графики функций будут иметь две общие точки, т.е. прямые будут касаться окружности. Тогда расстояние от начала координат до каждой прямой равно радиусу окружности. Так как прямые отсекают в первой и третьей четвертях прямоугольные равнобедренные треугольники, то точки касания – середины отрезков прямых в этих четвертях.



Найдем координаты середины отрезков:

$$A\left(\frac{\sqrt{50}}{2};\frac{\sqrt{50}}{2}\right).$$

$$R=|OA|,\ \sqrt{2(7+a)}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2},$$

$\sqrt{2(7+a)}=5$,

$2(7+a)=25$,

$7+a=12{,}5$;

$a=5{,}5$.

Ответ. $a=5{,}5$.

Задача10. (16 баллов)

Решить неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}>2$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\sqrt{x-1}>0, \\ x-1\geq 0. \end{cases}$ $x\geq 1$.

Выполним преобразование левой части неравенства.

$$\frac{1}{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}>2$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}}>2$$

$$\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}+1\right|}+\frac{1}{\left|\sqrt{x-1}-1\right|}>2$$

Обозначим $\sqrt{x-1}=t$, $t\geq 0$.

Тогда

$$\frac{1}{|t+1|}+\frac{1}{|t-1|}>2,\ t\geq 0, t\neq 1.$$

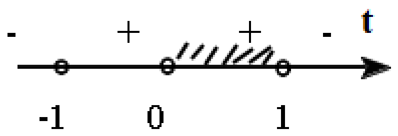
$$\frac{|t-1|+|t+1|-2|t+1||t-1|}{|t+1||t-1|}>0$$

С учетом ОДЗ решаем неравенство на двух промежутках.

1. $t\in(0;1)$

$$\frac{-t+1+t+1-2(-t+1)(t+1)}{(-t+1)(t+1)}>0$$

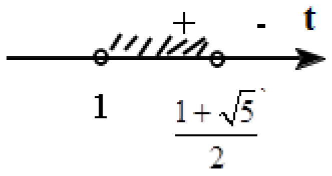
$$\frac{2t^2}{(-t+1)(t+1)}>0$$



Таким образом, $t\in(0;1)$.

2. $t\in(1;+\infty)$

$$\frac{t-1+t+1-2(t-1)(t+1)}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-t^2+t+1}{(t-1)(t+1)}>0,\ \frac{-\left(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(t-1)(t+1)}>0.$$



Таким образом, учитывая, что $t \in (1;+\infty)$, решениембудет промежуток $t \in \left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Возвращаясь к переменной x, получим совокупность неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} 0<\sqrt{x-1}<1, \\ 0<\sqrt{x-1}<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 0<x-1<1, \\ 0<x-1<\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ 1<x<\frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Таким образом, $x \in (1;2) \cup \left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ. $(1;2) \cup \left(1;\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.