Задача1 (4 баллов).

Найти 60% от значения выражения A, если $A=\dfrac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75$.

Решение:

$$\frac{2^{-2}+2018^0}{(0,5)^{-2}-5(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+4,75=\frac{\frac{1}{4}+1}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+4,75=\frac{1,25}{5}+4,75=0,25+4,75=5,$$

$5\cdot 0,6=3$.

Ответ: 3.

Задача2 (4 баллов).

Объемы добычи газа (млрд. куб. м) за первое полугодие 2017 года компаниями «Новатэк», «Роснефть», «ЛУКОЙЛ» относятся между собой как $\frac{1}{5}:\frac{1}{2}:\frac{1}{10}$, а объем добычи газа (млрд. куб. м) компанией «Газпром нефть» составляет 30% от объема добытого газа компанией «Роснефть».Определить, сколько млрд. куб. м составили объемы добычи газа компаниями «Новатэк», «Роснефть», ЛУКОЙЛ и «Газпром нефть», если известно, что компания «Роснефть» добыла на 8 млрд. куб. м больше, чем остальные компании вместе.

Решение:

Пусть x - объем добытого газа компаниями Новатэк», «Роснефть», «ЛУКОЙЛ» и «Газпром нефть»; $\frac{x}{5},\frac{x}{2},\frac{x}{10},\frac{3x}{10\cdot 2}$ - объемы добытого газа каждой из компаний соответственно.

Тогда, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{10}+\dfrac{3x}{20}+8$;

$$\frac{10x-4x-2x-3x}{20}=8;$$

$\dfrac{x}{20}=8$; $x=160$.

$$\frac{160}{5}=32,\ \frac{160}{2}=80,\ \frac{160}{10}=16,\ \frac{3\cdot 160}{20}=24.$$

Ответ: $32;80;16;24$.

Задача 3. (4 баллов)

Роща имеет форму круга радиуса 258 м. Расстояние между двумя деревьями в ней не меньше 12 м. Доказать, что в роще размещено не больше 2018 деревьев.

Решение.

Пусть в роще всего x деревьев. Опишем вокруг каждого дерева круг радиуса 6 м. согласно условию, эти круги не пересекаются и расположены в круге радиуса $258+6=264$ м. Следовательно, площадь большого круга не меньше суммарной площади маленьких. Имеем неравенство $264^2\pi \geq 6^2\pi \cdot x$. Тогда $x \leq 44^2$, $x \leq 1936$, т.е. $x<2018$.

Что требовалось доказать.

Задача4 (8 баллов).

Решитьуравнение $\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$.

Решение:

$$ОДЗ: \begin{cases} x^3-3x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

$\sqrt{x^3-3x+1}-x=-1$,

$\sqrt{x^3-3x+1}=x-1$,

$x^3-3x+1=x^2-2x+1$,

$x^3-x^2-x=0$,

$x(x^2-x-1)=0$,

$x_1=0\ (\notin ОДЗ)$ или $x^2-x-1=0$, $D=1+4=5$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ (\notin ОДЗ)$, $x_3=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача5 (8 баллов).

Доказать тождество $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\dfrac{2}{3}$.

Доказательство:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-1}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)+\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}{\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha-1)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-1)}=\frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}$$

Что требовалось доказать.

Задача 6. (12 баллов)

Два путешественника идут по одной и той же дороге в одном направлении. Первый находится на 10 км впереди другого и идет со скоростью 3 км/ч, второй идет со скоростью 5 км/ч. Вместе со вторым путешественником вылетает оса, пролетающая в час 12 км. Оса опережает второго путешественника и догоняет первого. Встретив первого путешественника, оса сразу поворачивает к путешественнику, с которым вылетела. Повстречав его, опять летит обратно, догоняя первого путешественника. Оса продолжала такие полеты до тех пор, пока путешественники не встретились. Сколько километров пролетела оса?

Решение.

Не пускаясь в тонкие и сложные выкладки, заметим, что оса летала до тех пор, пока путешественники не встретились. А путешественники встретились через 5 часов, т.е. $10:(5-3)=5$.

Следовательно, оса была в пути 5 часов и за это время пролетела $5\cdot 12=60$ километров.

Ответ. 60 км.

Задача7 (12 баллов).

Решить неравенство $\sqrt{8x-x^2-7}-\sqrt{11-x}\geq\sqrt{9x-x^2-18}$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{8x-x^2-7}\geq\sqrt{9x-x^2-18}+\sqrt{11-x}$.

Обозначим $9x-x^2-18=a$, $11-x=b$, где $a\geq 0, b\geq 0$.

Представим $8x-x^2-7=(9x-x^2-18)+(11-x)$.

Тогда неравенство примет вид $\sqrt{a+b}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Возведем обе части неравенства в квадрат: $a+b\geq a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$. Откуда $\sqrt{ab}\leq 0$, $ab=0$.

Следовательно, имеем две смешанные системы:

$$\begin{cases}9x-x^2-18=0,\\11-x\geq 0;\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}9x-x^2-18\geq 0,\\11-x=0.\end{cases}$$

Из первой системы $9x-x^2-18=0$, $x_1=3$, $x_2=6$. Так как $x\leq 11$, то и $x_1=3$, и $x_2=6$ удовлетворяют системе.

Из второй системы $11-x=0$ $x=11$. Так как $9x-x^2-18\geq 0$, $3\leq x\leq 6$, то $x=11$ не удовлетворяет системе. Таким образом, $x_1=3$, и $x_2=6$ решения исходного неравенства.

Ответ. $x_1=3, x_2=6$.

Задача8 (16 баллов).

Решить систему уравнений $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$ *ОДЗ* $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0.$

$\begin{cases} \sin^2 x - 1 = \sin y \sin x, & (1) \\ \cos^2 x - 1 = \cos y \cos x; & (2) \end{cases}$

$\begin{matrix} (1)+(2) \\ (2)-(1) \end{matrix} \begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 x - 2 = \cos y \cos x + \sin y \sin x, \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos y \cos x - \sin y \sin x; \end{cases} \begin{cases} \cos(y-x) = -1, \\ \cos 2x = \cos(y+x). \end{cases}$

Из первого уравнения системы: $y - x = \pi + 2\pi k$, $y = x + \pi + 2\pi n$;

Из второго уравнения системы: $\cos 2x = \cos(x + \pi + 2\pi n + x)$, $\cos 2x = -\cos 2x$,

$2\cos 2x = 0$, $2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k$. Тогда $y = \dfrac{\pi}{4} + \pi + \dfrac{\pi}{2}k + 2\pi n = \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}(k + 4n)$.

Пусть $k + 4n = l$, $k, l, n \in Z$. Тогда $y = \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}l = \dfrac{\pi}{4}(5 + 2l)$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4}(1 + 2k)$, $y = \dfrac{\pi}{4}(5 + 2l)$, $k, l \in Z$.

Задача9 (16 баллов).

Найти, при каком минимальном натуральном $k > 2017$ число $\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}}$ будет рациональным?

Решение: $\dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2 - 2k + 1} + \sqrt[3]{k^2 - k} + \sqrt[3]{k^2}} =$

$= \dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{2} \cdot 1 + \sqrt[3]{2^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3^2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt[3]{(k-1)^2} + \sqrt[3]{k^3}\sqrt{k-1} + \sqrt[3]{k^2}} =$

домножаем знаменатель, следовательно, и числитель до разности кубов $a^3 - b^3$

$= \dfrac{(\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + 1 \cdot \sqrt[3]{2} + 1)} + \dfrac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})} + \ldots$

$\ldots + \dfrac{\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}}{(\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})(\sqrt[3]{k^2} + \sqrt[3]{k}\sqrt[3]{k-1} + \sqrt[3]{(k-1)^2})} =$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{1}+\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{1}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{k}-\sqrt[3]{k-1}}{1}=\sqrt[3]{k}-1.$$

$\sqrt[3]{k}-1$ рационально, если $k=n^3 \Rightarrow n^3>2017 \Rightarrow n^3=2197=13^3, \left(12^3=1728\right) \Rightarrow$
$k=2197=13^3$.

Ответ: $k=2197\left(k=13^3\right)$.

Задача 10. (16 баллов)

Найти все такие значения x, при которых неравенство
$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$ выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение.

Преобразуем неравенство, записав его $\left(-2x^2+13x-13\right)a+4x^2-27x+33>0$.
Полученное неравенство линейное относительно a. Рассмотрим функцию
$f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$, $f(a)>0$, где $k(x)=-2x^2+13x-13$, $b(x)=4x^2-27x+33$.
Так как $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)$ – линейная относительно a, условие ее положительности на $(1;3)$ равносильно системе $\begin{cases} f(1)\geq 0, \\ f(3)\geq 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 1+4x^2-27x+33\geq 0, \\ \left(-2x^2+13x-13\right)\cdot 3+4x^2-27x+33\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-7x+10\geq 0, \\ x^2-6x+3\leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-5)\geq 0, \\ (x-3)^2-6\leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;2]\cup[5;+\infty), \\ x\in\left[3-\sqrt{6};3+\sqrt{6}\right]; \end{cases}$$

$$x\in\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$$

Ответ. $\left[3-\sqrt{6};2\right]\cup\left[5;3+\sqrt{6}\right]$.