Математика. 10-11 класс.
Вариант-22

Задача 1. (4 балла)
Найти значение числового выражения A, если

$$A=\left(3{,}018-\frac{2{,}4\sqrt{8\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2\frac{1}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{0{,}5}+1{,}5\sqrt{2}+20\sqrt{\frac{1}{50}}-\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot(0{,}1)^{-3}.$$

Решение.

$$\left(3{,}018-\frac{2{,}4\sqrt{8\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{2\frac{1}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{27}}{1\frac{1}{3}\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt{0{,}5}+1{,}5\sqrt{2}+20\sqrt{\frac{1}{50}}-\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 10^{3}=$$

$$=\left(3{,}018-\frac{2{,}4\sqrt{\frac{25}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{25}{12}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{81}{3}}}{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+1{,}5\sqrt{\frac{4}{2}}+20\cdot\frac{1}{5}\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{64}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 1000=.$$

$$=\left(3{,}018-\frac{2{,}4\cdot 5\sqrt{\frac{1}{3}}-9\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}+1{,}5\cdot 2\sqrt{\frac{1}{2}}+4\sqrt{\frac{1}{2}}-8\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 1000=$$

$$=\left(3{,}018-\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot(12-9+2{,}5+0{,}5-3)}{\sqrt{\frac{1}{2}}(4-1+3+4-8)}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 1000=\left(3{,}018-\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\cdot 1000=$$

$$=(3{,}018-1)\cdot 1000=2{,}018\cdot 1000=2018.$$

Ответ. 2018.

Задача 2. (4 балла)
Температуру можно измерить по шкалам Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0° по Цельсию соответствует 0° по Реомюру и 32° по Фаренгейту, а 100° по Цельсию соответствует 80° по Реомюру и 212° по Фаренгейту. Сколько будет градусов по Реомюру, если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадут?

Решение.
Обозначим показания температуры по шкале Цельсия x, тогда показания по шкале Реомюра – $0{,}8x$ (когда по Цельсию 100°, по Реомюру 80°), по шкале Фаренгейта – $1{,}8x+32$ (когда 0° по Цельсию, 32° по Фаренгейту; и 100° по Цельсию

соответствует $212°$ по Фаренгейту). Если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадают: $x = 1{,}8x + 32$, $0{,}8x = -32$, т.е. то температура по шкале Реомюра будет $-32°$.

Ответ. $-32°$.

Задача 3. (4 балла)

Решить уравнение $x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \ldots}}} = 64$.

Решение.

Перепишем левую часть уравнения в виде

$$x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \sqrt[3]{x \cdot \ldots}}} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{9}} \cdot x^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots = x^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots}.$$

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

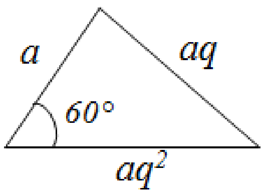
Получим уравнение $x^{\frac{3}{2}} = 64$, $x = 64^{\frac{2}{3}}$, $x = 16$.

Ответ. $x = 16$.

Задача 4. (8 баллов)

Один из углов треугольника равен $60°$, а длины сторон образуют геометрическую прогрессию. Найти все такие треугольники.

Решение.



Предположим, что треугольник не является равносторонним. Тогда один из двух неизвестных углов больше $60°$, а другой меньше. Следовательно, сторона aq лежит против угла $60°$.

Применим теорему косинусов.

$$(aq)^2 = a^2 + (aq^2)^2 - 2aaq^2 \cos 60°,$$

$$a^2q^2 = a^2 + a^2q^4 - 2a^2q^2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$a^2q^2 = a^2 + a^2q^4 - a^2q^2,$$

$$a^2q^4 - 2a^2q^2 + a^2 = 0.$$

Так как $a^2 \neq 0$, то $q^4 - 2q^2 + 1 = 0$,

$$(q^2 - 1)^2 = 0,$$

$$q^2 - 1 = 0,$$

$$q = 1.$$

Так как $q=1$, то все треугольники, удовлетворяющие условию задачи, равносторонние.

Ответ. Все равносторонние треугольники.

Задача 5. (8 баллов)

Доказать тождество $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg^4\alpha$.

Решение.

$$\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=tg^4\alpha,$$

$$\frac{3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+1-2\sin^2 2\alpha}{3\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+1-2\sin^2 2\alpha}=tg^4\alpha,$$

$$\frac{3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=tg^4\alpha,$$

$$\frac{8\sin^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{8\cos^2\alpha-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=tg^4\alpha,$$

$$\frac{8\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{8\cos^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}=tg^4\alpha,$$

$$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=tg^4\alpha,$$

$$tg^4\alpha=tg^4\alpha.$$

Что требовалось доказать.

Задача 6. (12 баллов)

Два города A и B находятся на расстоянии 300 км друг от друга. Из этих городов одновременно выезжают друг другу навстречу два велосипедиста и едут, не останавливаясь, со скоростью 25 км/ч. Вместе с велосипедистом из города A вылетает оса, пролетающая в час 27 км. Оса летит навстречу другому велосипедисту, выехавшему из города B. Встретив его, она сразу поворачивает обратно к велосипедисту, выехавшему из города A. Повстречав его, оса опять летит навстречу велосипедисту из города B. Оса продолжала свои полеты до тех пор, пока велосипедисты не встретились. Сколько километров пролетела оса?

Решение.

Не пускаясь в тонкие и сложные выкладки, заметим, что оса была в пути (летала от одного велосипедиста к другому) до тех пор, пока велосипедисты не встретились. А велосипедисты встретились через 6 часов, т.е. $300:(25+25)=6$.

Следовательно, оса была в пути 6 часов и за это время пролетела $6\cdot 27=162$ километра.

Ответ. 162 км.

Задача 7. (12 баллов)

Доказать тождество $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Решение.

Для доказательства тождества применим метод математической индукции.

1) Проверим справедливость тождества при $n=1$: $1\cdot 2=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}$, $2=2$.

2) Предположим, что данное тождество справедливо при $n=k\geq 1$, т.е.

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k(k+1)=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

3) Докажем, что тождество справедливо при $n=k+1$, т.е.

$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

Используя индукционное предположение, в левой части тождества получим

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

$$(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

$$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Что требовалось доказать.

Задача 8. (16 баллов)

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Будем считать первое уравнение системы квадратным относительно x. Перепишем его в виде: $x^2-(y+2)x-6y^2+11y-3=0$. Тогда.

$D=(y+2)^2-4\cdot(-6y^2+11y-3)=y^2+4y+4+24y^2-44y+12=$

$=25y^2-40y+16=(5y-4)^2$.

$x=\dfrac{y+2-5y+4}{2}=\dfrac{-4y+6}{2}=-2y+3$ или $x=\dfrac{y+2+5y-4}{2}=\dfrac{6y-2}{2}=3y-1$.

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-2y+3,\\ x^2+y^2=5;\end{cases}\\ \begin{cases}x=3y-1,\\ x^2+y^2=5.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему.

Если $x=-2y+3$, то $(-2y+3)^2+y^2-5=0$.

$$4y^2-12y+9+y^2-5=0,$$

$$5y^2-12y+4=0,\ \left(D=12^2-4\cdot5\cdot4=64\right),$$

$$y_1=\frac{12-8}{10}=\frac{2}{5},\ x_1=-2\cdot\frac{2}{5}+3=\frac{11}{5};$$

$$y_2=\frac{12+8}{10}=2,.x_2=-2\cdot2+3=-1.$$

Решим вторую систему.

Если $x=3y-1$, то $(3y-1)^2+y^2-5=0$.

$$9y^2-6y+1+y^2-5=0,$$

$$10y^2-6y-4=0,$$

$$5y^2-3y-2=0,(5-3-2=0),$$

$$y_3=1,\ x_3=3\cdot1-1=2;$$

$$y_4=-\frac{2}{5},\ x_4=3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)-1=-\frac{11}{5}.$$

Ответ. $(1;2),(-1;2),\left(\frac{11}{5};\frac{2}{5}\right),\left(-\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Задача 9. (16 баллов)

Решить неравенство $\cos^3 x\cos3x-\sin^3 x\sin3x\le-\frac{1}{8}$.

Решение.

$$\cos^3 x\cos3x-\sin^3 x\sin3x\le-\frac{1}{8}$$

Приведем тригонометрические функции к одинаковому аргументу:

$\sin3x=3\sin x-4\sin^3 x$, $\cos3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

Откуда, $4\sin^3 x=3\sin x-\sin3x$, $4\cos^3 x=\cos3x+3\cos x$.

Преобразуем исходное неравенство:

$$4\cos^3 x\cos 3x - 4\sin^3 x\sin 3x \le -\frac{1}{2},$$

$$(\cos 3x + 3\cos x)\cos 3x - (3\sin x - \sin 3x)\sin 3x \le -\frac{1}{2},$$

$$\cos^2 3x + 3\cos x\cos 3x - 3\sin x\sin 3x + \sin^2 3x \le -\frac{1}{2},$$

$$3(\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x) + 1 \le -\frac{1}{2},$$

$$3(\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x) \le -\frac{3}{2},$$

$$\cos x\cos 3x - \sin x\sin 3x \le -\frac{1}{2},$$

$$\cos 4x \le -\frac{1}{2},$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 4x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

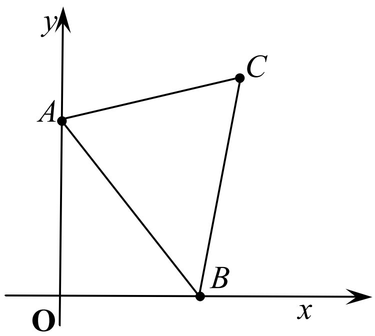
Ответ. $\left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$.

Задача 10. (16 баллов)

Найти все значения x и y, при которых выражение $z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$ принимает наибольшее значение.

Решение.

Каждый из радикалов, входящих в выражение $z = \sqrt{x^2 + (y-4)^2} - \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$, напоминает формулу расстояния между двумя точками координатной плоскости.



Радикал $\sqrt{x^2 + (y-4)^2}$ есть расстояние между точками $A(0;4)$ и $C(x;y)$, т.е. $|AC| = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$; радикал $\sqrt{y^2 + (x-3)^2}$ есть расстояние между точками $B(3;0)$ и $C(x;y)$, т.е. $|CB| = \sqrt{y^2 + (x-3)^2}$. Тогда $z = |AC| - |CB|$

На основании неравенства треугольника: $|AB| + |CB| \ge |AC|$, или $|AC| - |CB| \le |AB|$, т.е. $z \le |AB|$.

$|AB|=5$ (по т. Пифагора $|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$).

Т.е., $z\le 5$.

Тогда, наибольшее значение $z=5$.

Все $C(x;y)$, при которых $z=5$, принадлежат отрезку прямой AB при $x\in[0;3]$.

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точки $A(0;4)$ и $B(3;0)$:

$\frac{x}{3}=\frac{y-4}{-4}$. Т.е., $y=-\frac{4}{3}x+4$.

Таким образом, наибольшее значение $z=5$, достигается при $x\in[0;3]$, $y=-\frac{4}{3}x+4$.

Ответ. $z=5$, $x\in[0;3]$, $y=-\frac{4}{3}x+4$.