Математика. 11 класс.
Вариант-41

Задание 1. (5 баллов) Найти значение выражения A при $x = 0{,}2019$, если

$$A = \frac{\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}}.$$

Решение.

Используем формулы $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, тогда $\sqrt[3]{38\pm 17\sqrt{5}} = (a\pm b)^3$.

Составим систему для определения a и b: $\begin{cases} \pm 3a^2b \pm b^3 = \pm 17\sqrt{5}, \\ a^3 + 3ab^2 = 38. \end{cases}$

Решая которую, получаем $a = 2$, $b = \sqrt{5}$.

Аналогично, для выражения $\sqrt[3]{\pm(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)} = (a\pm b)^3$, получаем $a = \sqrt{x}$, $b = 1$.

Подставляем в исходное выражение

$$A = \frac{\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{(1+3x)+\sqrt{x}(3+x)}-\sqrt[3]{\sqrt{x}(3+x)-(1+3x)}} = \frac{2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1} = 2$$

Ответ. $A = 2$.

Задание 2. (10 баллов) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $f(x) = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $g(x) = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, все члены которой положительны. Найти значения A и B, если $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = 36x - x^2$.

Решение.

По условию задачи $f(x) = 4x - x^2$,

$f(x) = A$, т.е. $4x - x^2 = A$,

$x^2 - 4x + A = 0$ (1)

Аналогично, $g(x) = 36x - x^2$,

$g(x) = B$, т.е. $36x - x^2 = B$,

$x^2 - 36x + B = 0$. (2)

Известно, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - 4x + A = 0$, тогда по теореме Виета получим: $x_1 \cdot x_2 = A$, $x_1 + x_2 = 4$. Аналогично, x_3 и x_4 корни уравнения $x^2 - 36x + B = 0$, тогда по теореме Виета: $x_3 \cdot x_4 = B$, $x_3 + x_4 = 36$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = A, \\ x_1 + x_2 = 4, \\ x_3 \cdot x_4 = B, \\ x_3 + x_4 = 36. \end{cases}$

Поскольку последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является геометрической прогрессией, то по свойству геометрической прогрессии запишем:

$$x_2 = x_1 \cdot q,\ x_3 = x_1 \cdot q^2,\ x_4 = x_1 \cdot q^3.$$

Подставим значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_1 \cdot q = A, \\ x_1 + x_1 \cdot q = 4, \\ x_1 \cdot q^2 \cdot x_1 \cdot q^3 = B, \\ x_1 \cdot q^2 + x_1 \cdot q^3 = 36; \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1{}^2 \cdot q = A, & (1) \\ x_1(1+q) = 4, & (2) \\ x_1{}^2 \cdot q^5 = B, & (3) \\ x_1 \cdot q^2(1+q) = 36. & (4) \end{cases}$$

Поделим равенство (4) на (2): $\dfrac{x_1 q^2(1+q)}{x_1(1+q)} = \dfrac{36}{4}$, $q^2 = 9$, $q = 3$

(при $q = -3$ получаются отрицательные члены прогрессии).

Из (2) получим $x_1 = 1$, из (1) получим $A = 3$, а из (3) получим $B = 3^5 = 243$.

Ответ. $A = 3$, $B = 243$.

Задание 3. (15 баллов) Для функции $y = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение.

$y' = 2 \cdot 2 \cdot \sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \sin x$,

$y'' = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$,

$y''' = -\sin x = \sin(\pi + x)$,

$y^{(4)} = \cos x = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$,

…

$y^{(n)} = \sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2} + x\right)$.

Тогда, $y^{(2019)} = \sin\left(\dfrac{(2019-1)\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\dfrac{2018\pi}{2} + x\right) = \sin(504 \cdot 2\pi + \pi + 2x) = -\sin 2x$.

Ответ: $y^{(2019)} = -\sin x$.

Задание 4. (20 баллов) Решить уравнение

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1}.$$

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}\geq 0$ и $\cos x-\frac{1}{2}\geq 0$, $\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1\geq 0$.

Возведём обе части уравнения в квадрат и упростим

$$\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}+2\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}+\cos x-\frac{1}{2}=\cos\frac{x}{2018}+\cos x-1,$$

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}}\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}=0,$$

Получаем два случая: $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}=0$ или $\cos x-\frac{1}{2}=0$.

Рассмотрим первое уравнение $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}=0$.

$$\frac{x}{2018}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z,$$

$$x=\pm\left(673\pi-\frac{\pi}{3}\right)+4036\pi k, k\in Z.$$

Все эти значения не удовлетворяют условию $\cos x-\frac{1}{2}\geq 0$, поскольку для них $\cos x=-\frac{1}{2}$.

Рассмотрим второе уравнение $\cos x-\frac{1}{2}=0$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

Среди этих значений надо подобрать те, для которых $\cos\frac{x}{2018}-\frac{1}{2}\geq 0$.

$$2\pi n-\frac{\pi}{3}\leq\frac{x}{2018}\leq\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,$$

$$2n-\frac{1}{3}\leq\frac{\frac{x}{\pi}}{2018}\leq\frac{1}{3}+2n,$$

Для $\frac{x}{\pi}=\pm\frac{1}{3}+2k$ имеем $2018\left(2n-\frac{1}{3}\right)\leq\pm\frac{1}{3}+2k\leq 2018\left(\frac{1}{3}+2n\right)$.

1) $\frac{x}{\pi}=\frac{1}{3}+2k$.

$$2018\cdot 2n-\frac{2018}{3}\leq\frac{1}{3}+2k\leq 2018\cdot 2n+\frac{2018}{3},$$

$$2018\cdot 2n-637-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\leq 2k\leq 2018\cdot 2n+637+\frac{1}{3}-\frac{1}{3},$$

$$2\cdot 2018n-673-\frac{2}{3}\leq 2k\leq 2\cdot 2018n+673,$$

$$2018n-\frac{673}{2}-\frac{1}{3}\leq k\leq 2018n+\frac{673}{2},$$

$$2018n-336-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\leq k\leq 2018n+336+\frac{1}{2},$$

$$2018n-336\frac{5}{6}\leq k\leq 2018n+336\frac{1}{2}.$$

Так как $k, n \in Z$, то последнее неравенство равносильно неравенству
$2018n - 336 \le k \le 2018n + 336$.

2) $\dfrac{x}{\pi} = -\dfrac{1}{3} + 2k$.

$2018 \cdot 2n - 672 - \dfrac{2}{3} \le -\dfrac{1}{3} + 2k \le 2018 \cdot 2n + 673 - \dfrac{1}{3}$.

Выполняя преобразования, получим неравенство
$2018n - 336\dfrac{1}{2} \le k \le 2018n + 336\dfrac{5}{6}$.

Так как $k, n \in Z$, то последнее неравенство равносильно неравенству
$2018n - 336 \le k \le 2018n + 336$.

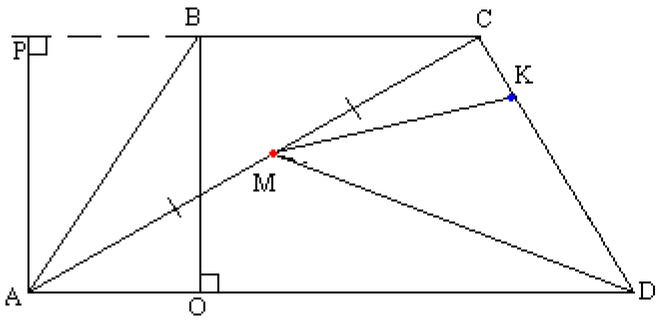
Т.о., $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, $2018n - 336 \le k \le 2018n + 336,\ k, n \in Z$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, $2018n - 336 \le k \le 2018n + 336,\ k, n \in Z$.

Задание 5. (20 баллов) В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ точка M делит диагональ AC пополам, а точка K делит сторону DC в отношении $1:3$ $(3CK = KD)$. Найти отношение площади треугольника MKD к площади трапеции $ABCD$, если $AD = 4BC$.

Решение.

В соответствии с условиями задачи выполним схематичный рисунок.

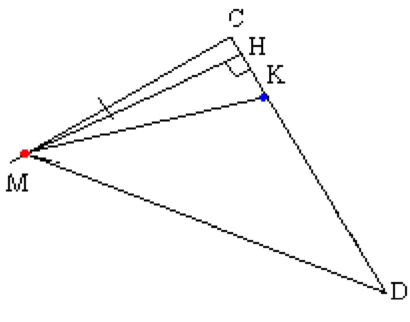


Высоты трапеции, проведенные к основаниям, равны, поэтому AP=BO. Запишем формулу площади для треугольников ABC и ACD:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AP \cdot BC, \qquad S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot 4 \cdot BC, \qquad \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AP \cdot BC}{2AP \cdot BC} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{4} S_{ACD} = S_{ABC}, \qquad S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{5}{4} S_{ACD}.$$

Рассмотрим треугольники CMK и MKD



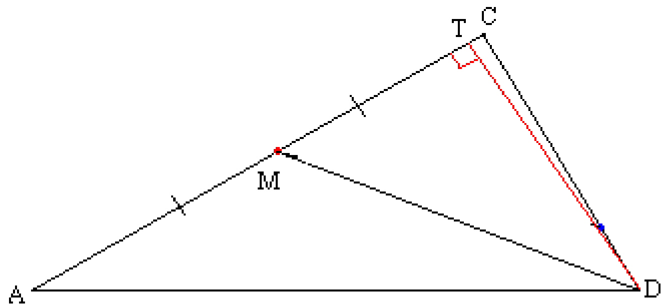
Найдем их площадь:

$$S_{CMK} = \frac{1}{2} MH \cdot CK, \qquad S_{MKD} = \frac{1}{2} MH \cdot KD = \frac{1}{2} MH \cdot 3CK = \frac{3}{2} MH \cdot CK,$$

$$\frac{S_{CMK}}{S_{MKD}} = \frac{\frac{1}{2} MH \cdot CK}{\frac{3}{2} MH \cdot CK} = \frac{1}{3}, \qquad S_{CMK} = \frac{1}{3} S_{MKD},$$

$$S_{CMD} = S_{MKD} + S_{CMK} = S_{MKD} + \frac{1}{3} S_{MKD} = \frac{4}{3} S_{MKD}.$$

Рассмотрим треугольники CMD и AMD



Найдем их площадь:

$$S_{CMD} = \frac{1}{2} DT \cdot CM, \qquad S_{AMD} = \frac{1}{2} DT \cdot AM = \frac{1}{2} DT \cdot CM, \qquad S_{CMD} = S_{AMD},$$

$$S_{ACD} = S_{CMD} + S_{AMD} = 2S_{CMD}.$$

Найдем отношение площади треугольника MKD к площади трапеции ABCD

$$\frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{MKD}}{\frac{5}{4} S_{ACD}} = \frac{S_{MKD}}{\frac{5}{2} S_{CMD}} = \frac{S_{MKD}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} S_{MKD}} = \frac{3}{10}.$$

Ответ. $\frac{3}{10}$.

Задание 6. (30 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^6 + y^6 + z^6 = 1, \\ 3x^3 + 5y^3 - 4z^3 = \sqrt{213}. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \{x^3; y^3; z^3\}$ и вектор $\vec{b} = \{3; 5; -4\}$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^6 + y^6 + z^6} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50}$.

Скалярное произведение векторов равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{50} \cdot \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их координаты равно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3x^3 + 5y^3 - 4z^3 = \sqrt{213}$.

Тогда, $\sqrt{213} = \sqrt{50} \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{213}}{\sqrt{50}} > 1$.

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

Ответ. Система уравнений не имеет решений.

Задание 1. (5 баллов) Найти значение выражения A при $x = 0{,}2018$, если

$$A = \frac{\sqrt[3]{2(4+3x)+\sqrt{x}(12+x)}+\sqrt[3]{2(4+3x)-\sqrt{x}(12+x)}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}$$

Решение.

Используем формулы $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, тогда $\sqrt[3]{26 \pm 15\sqrt{3}} = (a \pm b)^3$.

Составим систему для определения a и b: $\begin{cases} \pm 3a^2b \pm b^3 = \pm 15\sqrt{3}, \\ a^3 + 3ab^2 = 26. \end{cases}$

Решая которую, получаем $a = 2$, $b = \sqrt{3}$.

Аналогично, для выражения $\sqrt[3]{2(4+3x) \pm \sqrt{x}(12+x)} = (a \pm b)^3$, получаем $a = 2$, $b = \sqrt{x}$.

Подставляем в исходное выражение

$$A = \frac{\sqrt[3]{2(4+3x)+\sqrt{x}(12+x)}+\sqrt[3]{2(4+3x)-\sqrt{x}(12+x)}}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}-\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}} = 1$$

Ответ. $A = 1$.

Задание 2. (10 баллов) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $p(x) = A$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $q(x) = B$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является арифметической прогрессией. Найти значения A и B, если $p(x) = 6x - x^2$, $q(x) = 24x - x^2$.

Решение.

По условию задачи $p(x) = 6x - x^2$, $p(x) = A$, т.е. $6x - x^2 = A$ или $x^2 - 6x + A = 0$. Аналогично, $q(x) = 24x - x^2$, $q(x) = B$, т. е. $24x - x^2 = B$ или $x^2 - 24x + B = 0$.

Известно, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - 6x + A = 0$, тогда по теореме Виета получим: $x_1 \cdot x_2 = A$, $x_1 + x_2 = 6$. Аналогично, x_3 и x_4 корни уравнения $x^2 - 24x + B = 0$, тогда по теореме Виета: $x_3 \cdot x_4 = B$, $x_3 + x_4 = 24$.

Составим систему уравнений: $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = A, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ x_3 \cdot x_4 = B, \\ x_3 + x_4 = 24. \end{cases}$.

Поскольку последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является арифметической прогрессией, то по свойству арифметической прогрессии запишем:

$$x_2 = x_1 + d, \quad x_3 = x_1 + 2d, \quad x_4 = x_1 + 3d$$

Подставим значения в систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 \cdot (x_1 + d) = A, \\ x_1 + x_1 + d = 6, \\ (x_1 + 2d) \cdot (x_1 + 3d) = B, \\ x_1 + 2d + x_1 + 3d = 24; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \cdot (x_1 + d) = A, \\ 2x_1 + d = 6, \\ (x_1 + 2d) \cdot (x_1 + 3d) = B, \\ 2x_1 + 5d = 24. \end{cases}$$

Вычтем из четвертого равенства второе равенство: $(2x_1 + 5d) - (2x_1 + d) = 24 - 6$, $4d = 18$, $d = \dfrac{9}{2}$.

Из второго равенства получим $x_1 = \dfrac{3}{4}$, из первого получим $A = \dfrac{63}{16}$,

а из третьего получим $B = \dfrac{2223}{16}$.

Ответ: $A = \dfrac{63}{16}$**,** $B = \dfrac{2223}{16}$**.**

Задание 3. (15 баллов) Для функции $y = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$ найти производную 2018-го порядка ($y^{(2018)}$).

Решение.

$$y' = 2 \cdot 2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin x,$$

$$y'' = -\cos x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$y''' = \sin x = -\sin(\pi + x),$$

$$y^{(4)} = \cos x = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right),$$

…

$$y^{(n)} = -\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2} + x\right).$$

Тогда,

$$y^{(2018)} = -\sin\left(\frac{(2018-1)\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(504 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x.$$

Ответ: $y^{(2018)} = -\cos x$**.**

Задание 4. (20 баллов) Решить уравнение

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\cos\frac{x}{2019}+\cos x-\sqrt{3}}-\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}\ .$$

Решение.

ОДЗ: $\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$ и $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$, $\cos\frac{x}{2019}+\cos x-\sqrt{3}\geq 0$.

Возведём обе части уравнения в квадрат и упростим:

$$\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\sqrt{\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}+\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{x}{2019}+\cos x-\sqrt{3}\ ,$$

$$\sqrt{\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}=0\ .$$

Получаем два случая: $\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$ или $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

Рассмотрим первое уравнение $\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

$$\frac{x}{2019}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\ ,$$

$$x=\pm\left(336\pi-\frac{\pi}{2}\right)+4038\pi k, k\in Z\ .$$

Все эти значения не удовлетворяют условию $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$, поскольку для них $\cos x=0$.

Рассмотрим второе уравнение $\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$

Среди этих значений надо подобрать те, для которых $\cos\frac{x}{2019}-\frac{\sqrt{3}}{2}\geq 0$.

$$2\pi n-\frac{\pi}{6}\leq\frac{x}{2019}\leq\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\ ,$$

$$2n-\frac{1}{6}\leq\frac{\frac{x}{\pi}}{2019}\leq\frac{1}{6}+2n\ ,$$

Для $\frac{x}{\pi}=\pm\frac{1}{6}+2k$, имеем $2019\left(2n-\frac{1}{6}\right)\leq\pm\frac{1}{6}+2k\leq 2019\left(\frac{1}{6}+2n\right)$.

1) $\frac{x}{\pi}=\frac{1}{6}+2k$

$$2019\cdot 2n-\frac{2019}{6}\leq\frac{1}{6}+2k\leq 2019\cdot 2n+\frac{2019}{6};$$

$$2019\cdot 2n-\frac{2019}{6}-\frac{1}{6}\leq 2k\leq 2019\cdot 2n+\frac{2019}{6}-\frac{1}{6}\ ,$$

$$2\cdot 2019n-336-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\leq 2k\leq 2\cdot 2019n+336+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\ ,$$

$$2019n-168\frac{1}{3}\leq k\leq 2019n+168\frac{1}{6}\ ,$$

Так как $k, n\in Z$, то последнее неравенство равносильно неравенству

$$2019n-168\leq k\leq 2019n+168\ .$$

2) $\frac{x}{\pi}=-\frac{1}{6}+2k$.

$$2019\cdot 2n-336-\frac{1}{2}\le -\frac{1}{6}+2k\le 2019\cdot 2n+336+\frac{1}{2}.$$

Выполняя преобразования, получим неравенство

$$2019n-168\frac{1}{6}\le k\le 2019n+168\frac{1}{3}.$$

Так как $k,n\in Z$, то последнее неравенство равносильно неравенству

$$2019n-168\le k\le 2019n+168.$$

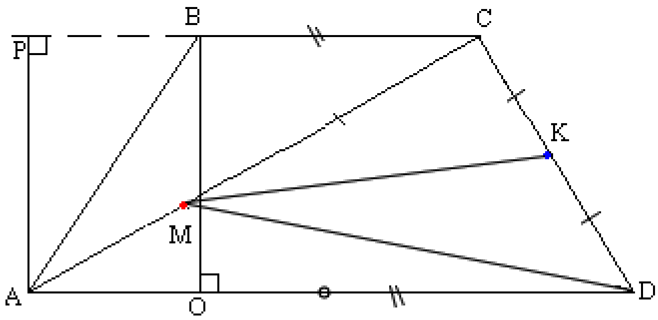
Т.о., $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$, $2019n-168\le k\le 2019n+168,\ k,n\in Z$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$, $2019n-168\le k\le 2019n+168,\ k,n\in Z$.

Задание 5. (20 баллов) В трапеции $ABCD$ $(AD\parallel BC)$ точка M делит диагональ AC в отношении $1:3$ $(3AM=MC)$, а точка K – середина DC. Найти отношение площади треугольника MCK к площади трапеции $ABCD$, если $AD=2BC$.

Решение.

В соответствии с условиями задачи выполним схематичный рисунок.



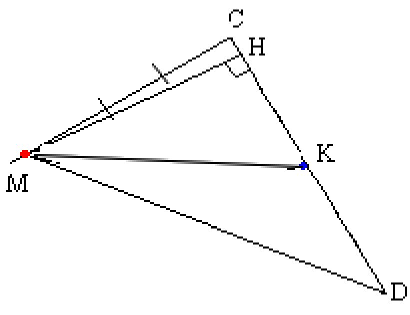
Высоты трапеции, проведенные к основаниям, равны, поэтому AP=BO.

Запишем формулу площади для треугольников ABC и ACD:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AP\cdot BC,\qquad S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot BO\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot AP\cdot 2\cdot BC,\qquad \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{1}{2}AP\cdot BC}{AP\cdot BC}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}S_{ACD}=S_{ABC},\qquad S_{ABCD}=S_{ACD}+S_{ABC}=\frac{3}{2}S_{ACD}.$$

Рассмотрим треугольники CMK и MKD

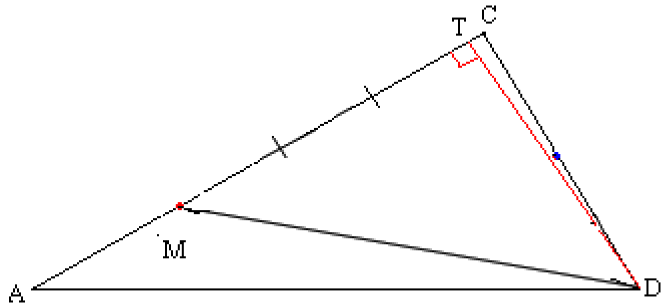


Найдем их площадь:

$$S_{CMK} = \frac{1}{2} MH \cdot CK, \qquad S_{MKD} = \frac{1}{2} MH \cdot KD = \frac{1}{2} MH \cdot CK, \qquad \frac{S_{CMK}}{S_{MKD}} = \frac{\frac{1}{2} MH \cdot CK}{\frac{1}{2} MH \cdot CK} = 1,$$

$$S_{CMK} = S_{MKD}, \qquad S_{CMD} = S_{MKD} + S_{CMK} = S_{MKD} + S_{MKD} = 2S_{MKD}.$$

Рассмотрим треугольники CMD и AMD



Найдем их площадь:

$$S_{CMD} = \frac{1}{2} DT \cdot CM = \frac{1}{2} DT \cdot 3AM, \qquad S_{AMD} = \frac{1}{2} DT \cdot AM = \frac{1}{3} S_{CMD},$$

$$S_{ACD} = S_{CMD} + S_{AMD} = \frac{4}{3} S_{CMD}.$$

Найдем отношение площади треугольника MKD к площади трапеции ABCD

$$\frac{S_{MKD}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{MKD}}{\frac{3}{2} S_{ACD}} = \frac{S_{MKD}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} S_{MCD}} = \frac{\frac{1}{2} S_{MCD}}{2S_{MCD}} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^{10} + y^{10} + z^{10} = 1, \\ -2x^5 + y^5 + 5z^5 = \sqrt{315}. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \{x^5; y^5; z^5\}$ и вектор $\vec{b} = \{-2;1;5\}$.

Тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^{10} + y^{10} + z^{10}} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$.

Скалярное произведение векторов равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{30} \cdot \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их координаты равно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2x^5 + y^5 + 5z^5 = \sqrt{315}$.

Тогда, $\sqrt{315} = \sqrt{30} \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{30}} > 1$.

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

Ответ. Система уравнений не имеет решений.