
Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\left(\frac{3(\sqrt{13}+2)}{\sqrt{19}-4}-\frac{4(\sqrt{19}-2)}{\sqrt{13}-3}-2+\sqrt{19}\right)\cdot(2-\sqrt{13}).$$

Решение.

1) Найдем значение выражения в скобках:

$$\frac{3(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-3)-4(\sqrt{19}-2)(\sqrt{19}-4)-(2-\sqrt{19})\cdot(\sqrt{19}-4)\cdot(\sqrt{13}-3)}{(\sqrt{19}-4)\cdot(\sqrt{13}-3)}=$$

$$=\frac{-6\sqrt{19}\sqrt{13}+24\sqrt{13}+42\sqrt{19}-168}{(\sqrt{19}-4)\cdot(\sqrt{13}-3)}=\frac{-6\sqrt{13}(\sqrt{19}-4)+42(\sqrt{19}-4)}{(\sqrt{19}-4)\cdot(\sqrt{13}-3)}=$$

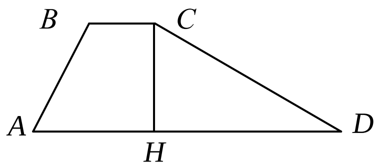
$$=\frac{(-6\sqrt{13}+42)}{(\sqrt{13}-3)}.$$

2) Тогда, $A=\dfrac{(-6\sqrt{13}+42)}{(\sqrt{13}-3)}\cdot(2-\sqrt{13})=\dfrac{162-54\sqrt{13}}{(\sqrt{13}-3)}=-54\dfrac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}-3}=-54$.

Ответ: $A=-54$.

Задача 2. (10 баллов) Основания трапеции равны 1 и 13, одна из боковых сторон равна $15\sqrt{2}$, а угол между ней и одним из оснований равен $135°$. Найдите площадь трапеции.

Решение.



По условию $BC=1,\ AD=13,\ CD=15\sqrt{2}$, $\angle BCD=135°$.

Проведем высоту трапеции CH.

Тогда $\angle HCD=135°-90°=45°$, $\angle CHD=90°$. Найдем $\angle CDH=45°$

Следовательно, ΔCHD – равнобедренный и $CH=HD$.

Из треугольника ΔCHD по Теореме Пифагора найдем $CH=x$.

$CH=HD=x,\ CD=15\sqrt{2}\Rightarrow x^2+x^2=(15\sqrt{2})^2$.

$2x^2=15^2\cdot 2\Rightarrow x=15$.

Таким образом, получили $CH=15$.

Найдем площадь трапеции: $S=\dfrac{BC+AD}{2}\cdot CH=\dfrac{1+13}{2}\cdot 15=7\cdot 15=105$.

Ответ: 105.

Задача 3. (15 баллов) Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же к сумме квадратов цифр этого числа прибавить произведение его цифр, то получится искомое число. Найти это число.

Решение.

Обозначим за x – количество десятков двузначного числа, y – количество единиц двузначного числа, тогда составим систему уравнений, причем $x, y \in Z$, $1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$:

$$\begin{cases} 10x + y = 3xy + 9, \\ x^2 + y^2 + xy = 10x + y. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы: $x^2 + y^2 + xy = 3xy + 9$, $(x - y)^2 = 9$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10x + y = 3xy + 9, \\ x - y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} 10x + y = 3xy + 9, \\ x - y = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из первой системы совокупности получим уравнение: $3y^2 - 2y - 21 = 0$. Решая его, найдем $y = 3$ – решение, которое удовлетворяет условию $0 \le y \le 9$. Тогда, $x = 3 + 3 = 6$.

Из второй системы совокупности получим уравнение: $3y^2 - 20y + 39 = 0$, которое не имеет решения.

Таким образом, искомое двузначное число: 63.

Ответ: 63.

Задача 4. (20 баллов) Доказать, что число $\dfrac{7^{2020^{2018}} - 3^{20^{19}}}{10}$ целое.

Решение.

Последняя цифра числа 7^n зависит от показателя степени n и принимает значения 7, 9, 3, 1, причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть 1 (единица).

Число 3^n оканчивается на одну из цифр 3, 9, 7, 1, причем если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 3^n есть 1 (единица).

Т.к. 20 делится на 4, то и 2020 делится на 4, следовательно, 2020^{2018} делится на 4 и 20^{19} делится на 4. Значит число $\dfrac{7^{2020^{2018}} - 3^{20^{19}}}{10}$ – целое, т.е. в числителе дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются той же цифрой 1, поэтому числитель делиться на 10.

Что требовалось доказать.

Задача 5. (20 баллов) Найти сумму всех целых значений a, при которых неравенство $\frac{1-ax-x^2}{x^2+2x+2} \le 2$ выполнено для всех x.

Решение.

Заметим, что знаменатель дроби $\frac{1-ax-x^2}{x^2+2x+2} = \frac{1-ax-x^2}{(x+1)^2+1}$ всегда положителен.

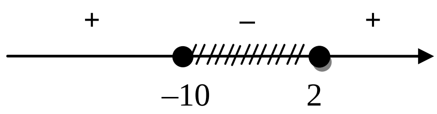
Преобразуем неравенство:

$1-ax-x^2 \le 2\left(x^2+2x+2\right),\ 3x^2+(4+a)x+3 \ge 0$

Квадратное неравенство будет выполнено для всех x, если дискриминант квадратного уравнения $3x^2+(4+a)x+3=0$ меньше либо равен 0.

$D=(4+a)^2-36 \le 0$,

$(a-2)(a+10) \le 0$



Получим, что $a \in [-10;\ 2]$. Сумма всех целых значений из этого промежутка равна –52.

Ответ: –52.

Задача 6. Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8% до 97,6%. Каково наименьшее возможное число студентов в такой группе.

Решение.

Число студентов, не сдавших экзамен, колеблется в пределах от 2,4% до 3,2% от общего числа студентов. Если N - число студентов в группе, то это означает, что найдется натуральное число (не сдавших экзамен студентов) x:

$0{,}024N < x < 0{,}032N$

$$\begin{cases} 0{,}032N > x, \\ 0{,}024N < x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x}{0{,}032}, \\ N < \dfrac{x}{0{,}024}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x \cdot 1000}{32}, \\ N < \dfrac{x \cdot 1000}{24}; \end{cases}$$

$\frac{250x}{8} < N < \frac{125x}{3}$,

$31{,}25x < N < 41\frac{2}{3}x$

Наименьшее возможное число N достигается при $x=1 \Rightarrow N=32$

Ответ: 32.

Задача 1. (5 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\left(\frac{2\left(\sqrt{15}-1\right)}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}+\frac{2\left(\sqrt{13}+2\right)}{\sqrt{15}-\sqrt{13}}-\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)\cdot\left(7-\sqrt{13}\right).$$

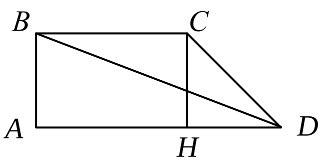
Решение.

$$A=\left(\frac{56+8\sqrt{13}}{\left(\sqrt{15}+\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{15}-\sqrt{13}\right)}\right)\cdot\left(7-\sqrt{13}\right)=\frac{56+8\sqrt{13}}{2}\cdot\left(7-\sqrt{13}\right)=\left(28+4\sqrt{13}\right)\left(7-\sqrt{13}\right)=144$$

Ответ: 144.

Задача 2. (10 баллов) Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 12,5 см, а большая диагональ является биссектрисой угла при большем основании и равна 20 см. Найти площадь трапеции.

Решение.



По условию $BC=12{,}5;\ BD=20;\ \angle CDB=\angle BDA$.

Так как $BC\parallel AD$, то $\angle CBD=\angle BDA$. Треугольник BCD равнобедренный и $BC=CD=12{,}5$.

Проведем высоту CH. Введем обозначения: $CH=h,\ HD=x$.

Применяя Теорему Пифагора для треугольников ΔABD и ΔCHD, получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} h=\sqrt{(12{,}5)^2-x^2}; \\ h=\sqrt{(20)^2-(12{,}5+x)^2}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем, что $x=3{,}5$; $h=12$.

Тогда, найдем площадь: $S=\dfrac{12{,}5+16}{2}\cdot 12=171$

Ответ. 171.

Задача 3. (15 баллов) Сумма цифр трехзначного числа равна 11, а сумма квадратов цифр этого числа равна 45. Если от искомого числа отнять 198, то получится число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

Решение.

Обозначим за x – количество сотен трехзначного числа, y – количество десятков трехзначного числа, z – количество единиц трехзначного числа, тогда составим систему уравнений, причем $x, y, z \in Z$, $1 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$, $0 \le z \le 9$:

$$\begin{cases} x + y + z = 11; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 45; \\ 100x + 10y + z - 198 = 100z + 10y + x. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы, получим: $x = z + 2$.

Тогда, из первого уравнения системы: $y = -2z + 9$.

Решим второе уравнение системы: $x^2 + y^2 + z^2 = 45$, $(z+2)^2 + (9-2y)^2 + z^2 = 45$, $3z^2 - 16z + 20 = 0$.

Решая его, найдем $z = 2$ – решение, которое удовлетворяет условию $0 \le z \le 9$, $z \in Z$. Тогда, $x = 2 + 2 = 4$, $y = 9 - 4 = 5$.

Таким образом, искомое трехзначное число: 452.

Ответ: 452.

Задача 4. (20 баллов) Доказать, что число $\dfrac{3^{2020^{2017}} - 7^{20^{18}}}{10}$ целое.

Решение.

Последняя цифра числа 3^n зависит от показателя степени n и принимает значения 3, 9, 7, 1, причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 3^n есть 1 (единица).

Число 7^n оканчивается на одну из цифр 7, 9, 3, 1, причем если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть 1 (единица).

Т.к. 20 делится на 4, то и 2020 делится на 4, следовательно, 2020^{2017} делится на 4 и 20^{18} делится на 4. Значит число $\dfrac{3^{2020^{2017}} - 7^{20^{18}}}{10}$ – целое, т.е. в числителе дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются той же цифрой 1, поэтому числитель делиться на 10.

Что требовалось доказать.

Задача 5. (20 баллов) Найти наибольшее целое значение a, при котором система неравенств $-3 < \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$ выполняется при всех x.

Решение.

Заметим, что знаменатель дроби $\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} = \dfrac{x^2+ax-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$ всегда положителен.

Преобразуем неравенство:

$-3\left(x^2-x+1\right) < x^2+ax-2 < 2\left(x^2-x+1\right)$, $-3x^2+3x-3 < x^2+ax-2 < 2x^2-2x+2$.

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} -3x^2+3x-3 < x^2+ax-2, \\ x^2+ax-2 < 2x^2-2x+2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+(a-3)x+1 > 0, \\ x^2-(a+2)x+4 > 0. \end{cases}$$

Квадратное неравенство $4x^2+(a+3)x-5>0$ будет выполнено для всех x, если дискриминант квадратного уравнения $4x^2+(a+3)x-5=0$ меньше 0, т.е.

$D=(a-3)^2-16<0$, $(a-7)(a+1)<0$, $-1<a<7$.

Квадратное неравенство $x^2-(a+2)x+4>0$ будет выполнено для всех x, если дискриминант квадратного уравнения $x^2-(a+2)x+4=0$ меньше 0.

$D=(a+2)^2-16<0$, $(a-2)(a+6)\le 0$, $-6<a<2$.

Следовательно, оба неравенства выполняются для всех $a \in (-1;2)$ и наибольшее целое значение $a=1$.

Ответ. 1.

Задача 6. (30 баллов) Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов сдавших экзамен, оказалось в интервале от 97,8% до 98,2%. Каково наименьшее возможное число студентов в такой группе.

Решение.

Число студентов, не сдавших экзамен, колеблется в пределах от 1,8% до 2,2% от общего числа студентов. Если N - число студентов в группе, то это означает, что найдется натуральное число (не сдавших экзамен студентов) x:

$0{,}018N < x < 0{,}022N$

$$\begin{cases} 0{,}022N > x, \\ 0{,}018N < x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x}{0{,}022}, \\ N < \dfrac{x}{0{,}018}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x\cdot 1000}{22}, \\ N < \dfrac{x\cdot 1000}{18}; \end{cases}$$

$\dfrac{500x}{11} < N < \dfrac{500x}{9}$, $45\dfrac{5}{11}x < N < 56\dfrac{1}{9}x$

Наименьшее возможное число N достигается при $x=1 \Rightarrow N=46$.

Ответ. 46.