Задание 1. (5 баллов) Доказать, что уравнение $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ не имеет решений.

Решение.

$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=x^4-4x^3+4x^2+8x^2-24x+24=$

$(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=(x^2-2x)^2+8((x-1.5)^2+0.75)=$

$(x^2-2x)^2+8(x-1.5)^2+6\neq 0.$

Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать.

Задание 2. (10 баллов) Решить неравенство $(4-\sqrt{15})^x+(4+\sqrt{15})^x\leq 62$.

Решение.

Т.к. $(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})=1$, то $(4+\sqrt{15})^x=\dfrac{1}{(4-\sqrt{15})^x}$.

Исходное неравенство можно записать в виде: $(4-\sqrt{15})^x+\dfrac{1}{(4-\sqrt{15})^x}\leq 62$.

Пусть $t=(4-\sqrt{15})^x=a^x$, где $a=4-\sqrt{15},\ a\in(0;1),\ t>0$.

$$\begin{cases} t+\dfrac{1}{t}\leq 62 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-62t+1\leq 0 \\ t>0 \end{cases}$$

$$t_1=31+\sqrt{960}=31+8\sqrt{15}=(4+\sqrt{15})^2=\frac{1}{(4-\sqrt{15})^2}=a^{-2}$$

$$t_2=31-\sqrt{960}=31-8\sqrt{15}=(4-\sqrt{15})^2=a^2$$

$$\begin{cases} (a^x-a^2)(a^x-a^{-2})\leq 0 \\ x\in R \end{cases} \qquad x\in[-2;\,2]$$

Ответ: $x\in[-2;\,2]$

Задание 3. (15 баллов) Для функции $y=\sin^2 x$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение.

$y'=2^0\cdot\sin 2x$,

$y''=2^1\cdot\cos 2x=2^1\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$,

$y'''=-2^2\cdot\sin 2x=2^2\cdot\sin(\pi+2x)$,

$y^{(4)}=-2^3\cdot\cos 2x=2^3\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)$,

$y^{(5)}=2^4\cdot\sin 2x=2^5\cdot\sin(2\pi+2x)$,

…

$$y^{(n)} = 2^{(n-1)} \cdot \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2} + 2x\right).$$

Тогда,

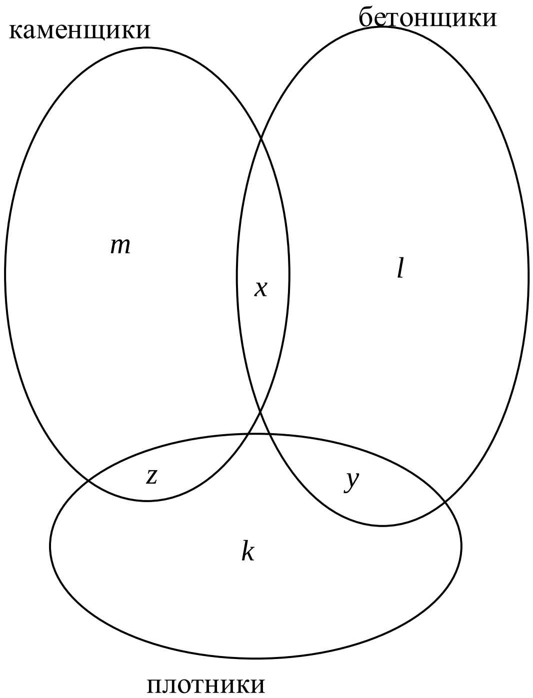
$$y^{(2019)} = 2^{(2019-1)} \cdot \sin\left(\frac{(2019-1)\pi}{2} + 2x\right) = 2^{2018} \cdot \sin\left(\frac{2018\pi}{2} + 2x\right) = 2^{2018} \cdot \sin(504 \cdot 2\pi + \pi + 2x) =$$

$$= -2^{2018} \cdot \sin 2x.$$

Ответ: $y^{(2019)} = -2^{2018} \cdot \sin 2x$.

Задание 4. (20 баллов) Строительный отряд состоит из 32 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника в отряде в два раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов владеющих профессией каменщика, причем $3 \le n \le 20$ (n – целое число). Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если бойцов, владеющих двумя профессиями на два больше, чем бойцов, владеющих профессией плотника?

Решение.



Пусть u бойцов владеет профессией бетонщика, тогда $2u$ – профессией плотника, $2nu$ – профессией каменщика.

Обозначим m число бойцов, владеющих только профессией каменщика, l – число бойцов, владеющих только профессией бетонщика, k – число бойцов, владеющих только профессией плотника. Пусть x число бойцов, владеющих профессиями каменщика и бетонщика, y – число бойцов, владеющих профессиями бетонщика и плотника, z – число бойцов, владеющих профессиями каменщика и плотника.

Тогда

$$m + l + k + x + y + z = 32. \qquad (*)$$

$$\begin{cases} m + x + z = 2nu, \\ l + x + y = u, \\ k + y + z = 2u. \end{cases} \qquad (**)$$

$$x + y + z = 2u + 2. \qquad (***)$$

Сложив уравнения системы (**), имеем

$$m + l + k + 2x + 2y + 2z = 2nu + 3u,$$

$$m + l + k = 2nu + 3u - 2(x + y + z).$$

Учитывая (***), получим $m + l + k = 2nu + 3u - 2(2u + 2) = 2nu - u - 4$.

Из (*) и (***) получим, что $m + l + k = 32 - (x + y + z) = 32 - (2u + 2) = 30 - 2u$.

Или $2nu - u - 4 = 30 - 2u$,

$2nu + u = 34$,

$u(2n + 1) = 34$,

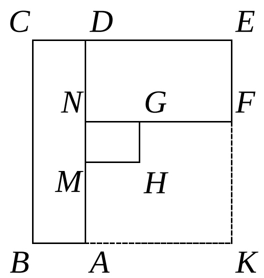
<u>1 способ.</u>

$$u = \frac{34}{2n + 1}.$$

Т.к. u – число бойцов, владеющих профессией бетонщика и $3 \le n \le 20$, то $(2n+1)$ делитель 34 и n – целое число.
$2n+1=34$, $2n=33$, n – нецелое,
$2n+1=17$, $2n=16$, $n=8$,
$2n+1=2$, $2n=1$, n – нецелое,
$2n+1=1$, $2n=0$, $n=0$, но $3 \le n \le 20$.
Т.о., $n=8$, $u=2$, $m+l+k=30-2\cdot 2=26$ (число бойцов в отряде, владеющих только одной профессией).
2 способ.
$u(2n+1)=34$,
$n=\dfrac{34-u}{2u}$
Т.к. $3 \le n \le 20$, то $3 \le \dfrac{34-u}{2u} \le 20$, $\dfrac{34}{41} \le u \le \dfrac{34}{7}$. u может принимать значения 1,2,3 или 4.
Если $u=1$, то n – нецелое; если $u=2$, то $n=8$; если $u=3$, то n – нецелое; если $u=4$, то n – нецелое. Т.о. $u=2$, а $m+l+k=30-2\cdot 2=26$ (число бойцов в отряде, владеющих только одной профессией).

Ответ: 26.

Задание 5. (20 баллов) Полевой лагерь геологов представляет собой на земле участок площадью 1600 кв.м, состоит из трех прямоугольных частей различного назначения и имеет форму многоугольника $ABCEFGHM$ (см. рисунок). В многоугольнике $ABCEFGHM$: $MA=GF=20$м, $MH=15$м и $GH \ge 10$м. Найти наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин BK, KE и GH, при которых периметр полевого лагеря геологов является наименьшим.



Решение.
Площадь участка $ABCEFGHM$ $S_{ABCEFGHM}=1600\text{м}^2$, а его периметр равен периметру прямоугольника $BCEK$. Обозначим $BK=x$, $KE=y$, $GH=z$. Тогда периметр $P=2(x+y)$, $z \ge 10$ и
$S_{BCEK}=xy=S_{ABCEFGHM}+GF\cdot GH+(MH+GF)\cdot MA=1600+20z+700=2300+20z$.
Т.к. $GH \ge 10$, то $S_{BCEK} \ge 1600+200+700$, $S_{BCEK} \ge 2500$, т.е $2300+20z \ge 2500$. Т.о., $xy \ge 2500$.
Поэтому, $y \ge \dfrac{2500}{x}$, и, т.к. $P=2(x+y)$, то $P \ge 2\left(x+\dfrac{2500}{x}\right)$.
Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$x+\frac{2500}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2500}{x}}$, $x+\frac{2500}{x}\geq 100$, причем равенство достигается только при $x=\frac{2500}{x}$, т.е. $x=50$, поэтому наименьшее значение функции $f(x)=x+\frac{2500}{x}$ достигается при $x=50$, а $f(50)=100$. Следовательно, $P\geq 2\cdot 100$, $P\geq 200$. Т.е. наименьшее значение периметра участка $P=200$, $BK=50$, $KE=50$, $GH=10$.

Ответ: 200м, 50м, 50м, 10м.

Задание 6. (30 баллов) Найти решение система уравнений для всех положительных значений x,y, z

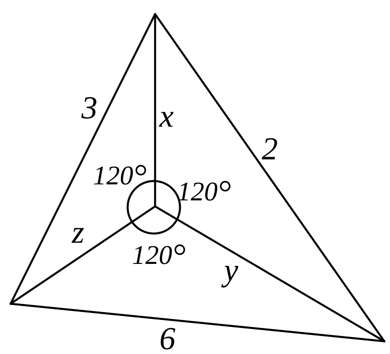
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x^2+xz+z^2=9, \\ y^2+yz+z^2=36. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x^2+xz+z^2=9, \\ y^2+yz+z^2=36 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x^2+y^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xy=2^2, \\ x^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xz=3^2, \\ y^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)yz=6^2. \end{cases}$

Т.к. $-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$, то систему перепишем $\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=2^2, \\ x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ=3^2, \\ y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=6^2. \end{cases}$

Уравнения получившейся системы можно интерпретировать как теоремы косинусов для треугольников с углом в 120° и сторонами x и y, x и z, y и z, т.е.
первое уравнение – треугольник со сторонами x,y, 2;
второе уравнение – треугольник со сторонами x,z, 3;
третье уравнение – треугольник со сторонами y,z, 6.



Если существуют положительные решения x, y и z, то составится и объемлющий треугольник со сторонами 2,3,6. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система не имеет решение.

Ответ: в положительных числах система не имеет решений.

Задание 1. (5 баллов) Доказать, что уравнение $x^4-6x^3+11x^2-4x+9=0$ не имеет решений.

Решение.

$$x^4-6x^3+11x^2-4x+9=x^4-6x^3+9x^2+2x^2-4x+9=$$

$$=\left(\left(x^2\right)^2-2\cdot 3x\cdot x^2+(3x)^2\right)+2\left(x^2-2x+1+3{,}5\right)=$$

$$(x^2-3x)^2+2(x^2-2x+1)+7=(x^2-3x)^2+2(x-1)^2+7\neq 0$$

Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать

Задание 2. (10 баллов) Решить неравенство $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x\leq 14$

Решение.

Т.к. $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)=1$, то $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=\dfrac{1}{\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x}$.

Исходное неравенство можно записать в виде: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\dfrac{1}{\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x}\leq 14$.

Пусть $t=\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=a^x$, где $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$, $a\in(0;1)$, $t>0$.

$$\begin{cases} t+\dfrac{1}{t}\leq 14 \\ t>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t^2-14t+1\leq 0 \\ t>0 \end{cases}$$

$$t_1=\frac{14+\sqrt{192}}{2}=7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2=\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}=a^{-2}$$

$$t_2=\frac{14-\sqrt{192}}{2}=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2=a^2$$

$$\begin{cases} (a^x-a^2)(a^x-a^{-2})\leq 0 \\ x\in R \end{cases}\qquad x\in[-2;\,2]$$

Ответ: $x\in[-2;\,2]$

Задание 3. (15 баллов) Для функции $y=\cos^2 x$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение.

$y'=(-1)^1\cdot 2^0\cdot\sin 2x$,

$y''=(-1)^2\cdot 2^1\cdot\cos 2x=(-1)^2\cdot 2^1\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)$,

$$y''' = (-1)^3 \cdot 2^2 \cdot \sin 2x = (-1)^3 \cdot 2^2 \cdot \sin(\pi + 2x),$$

$$y^{(4)} = (-1)^4 \cdot 2^3 \cdot \cos 2x = (-1)^4 \cdot 2^3 \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right),$$

$$y^{(5)} = (-1)^5 \cdot 2^4 \cdot \sin 2x = (-1)^5 \cdot 2^5 \cdot \sin(2\pi + 2x),$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot 2^{(n-1)} \cdot \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2} + 2x\right).$$

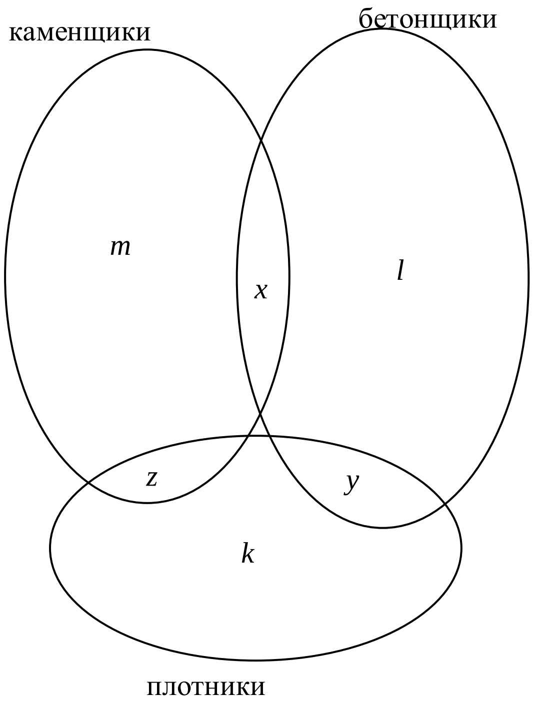
Тогда, $y^{(2019)} = (-1)^{2019} \cdot 2^{(2019-1)} \cdot \sin\left(\frac{(2019-1)\pi}{2} + 2x\right) = -2^{2018} \cdot \sin\left(\frac{2018\pi}{2} + 2x\right) =$

$= -2^{2018} \cdot \sin(504 \cdot 2\pi + \pi + 2x) = 2^{2018} \cdot \sin 2x$.

Ответ: $y^{(2019)} = 2^{2018} \cdot \sin 2x$.

Задание 4. (20 баллов) Строительный отряд состоит из 36 бойцов, каждый из которых владеет одной или двумя строительными профессиями: каменщик, бетонщик, плотник. Бойцов, владеющих профессией плотника в отряде в три раза больше, чем бойцов, владеющих профессией бетонщика, и в n раз меньше, чем бойцов владеющих профессией каменщика, причем $3 \le n \le 20$ (n – целое число). Сколько бойцов в отряде владеет только одной профессией, если бойцов, владеющих двумя профессиями на три больше, чем бойцов, владеющих профессией плотника?

Решение.



Пусть u бойцов владеет профессией бетонщика, тогда $3u$ – профессией плотника, $3nu$ – профессией каменщика.

Обозначим m число бойцов, владеющих только профессией каменщика, l – число бойцов, владеющих только профессией бетонщика, k – число бойцов, владеющих только профессией плотника. Пусть x число бойцов, владеющих профессиями каменщика и бетонщика, y – число бойцов, владеющих профессиями бетонщика и плотника, z – число бойцов, владеющих профессиями каменщика и плотника.

Тогда

$$m + l + k + x + y + z = 36. \qquad (*)$$

$$\begin{cases} m + x + z = 3nu, \\ l + x + y = u, \\ k + y + z = 3u. \end{cases} \qquad (**)$$

$$x + y + z = 3u + 3. \qquad (***)$$

Сложив уравнения системы (**), имеем

$m + l + k + 2x + 2y + 2z = 3nu + 4u$,

$m + l + k = 3nu + 4u - 2(x + y + z)$.

Учитывая (***), получим $m + l + k = 3nu + 4u - 2(3u + 3) = 3nu - 2u - 6$.

Из (*) и (***) получим, что $m + l + k = 36 - (x + y + z) = 36 - (3u + 3) = 33 - 3u$.

Или $3nu - 2u - 6 = 33 - 3u$,

$3nu + u = 39$,

$u(3n+1)=39$,

1 способ.

$u=\frac{39}{3n+1}$.

Т.к. u – число бойцов, владеющих профессией бетонщика и $3 \le n \le 20$, то $(3n+1)$ делитель 39 и n – целое число.

$3n+1=39,\ 3n=38,\ n$ – нецелое,

$3n+1=13,\ 3n=12,\ n=4$,

$3n+1=3,\ 3n=2,\ n$ – нецелое,

$3n+1=1,\ 3n=0,\ n=0$, но $3 \le n \le 20$.

Т.о., $n=4$, $u=3$, $m+l+k=33-3\cdot 3=24$ (число бойцов в отряде, владеющих только одной профессией).

2 способ.

$u(3n+1)=39$,

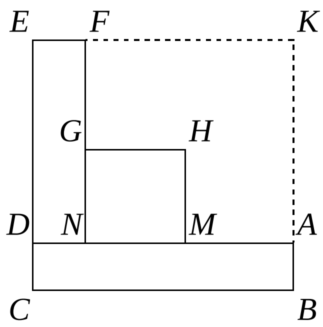
$n=\frac{39-u}{3u}$

Т.к. $3 \le n \le 20$, то $3 \le \frac{39-u}{3u} \le 20$, $\frac{39}{61} \le u \le \frac{39}{10}$. u может принимать значения 1,2 или 3.

Если $u=1$, то n – нецелое; если $u=2$, то n – нецелое; если $u=3$, то $n=4$. Т.о. $u=3$, а $m+l+k=33-3\cdot 3=24$ (число бойцов в отряде, владеющих только одной профессией).

Ответ: 24.

Задание 5. (20 баллов) Полевой лагерь геологов представляет собой на земле участок площадью 2100 кв.м, состоит из трех прямоугольных частей различного назначения и имеет форму многоугольника $ABCEFGHM$ (см. рисунок). В многоугольнике $ABCEFGHM$: $MA=GF=30$м, $MH=15$м и $GH \ge 20$м. Найти наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин BK, KE и GH, при которых периметр полевого лагеря геологов является наименьшим.



Решение.

Площадь участка $ABCEFGHM$ $S_{ABCEFGHM}=2100\text{м}^2$, а его периметр равен периметру прямоугольника $BCEK$. Обозначим $BK=x$, $KE=y$, $GH=z$. Тогда периметр $P=2(x+y)$, $z \ge 20$ и $S_{BCEK}=xy=S_{ABCEFGHM}+GF\cdot GH+(MH+GF)\cdot MA=2100+30z+900=3000+30z$.

Т.к. $z=GH \ge 20$, то $S_{BCEK} \ge 2100+600+900$, $S_{BCEK} \ge 3600$, т.е $3000+30z \ge 3600$. Т.о., $xy \ge 3600$.

Поэтому, $y \ge \frac{3600}{x}$, и, т.к. $P=2(x+y)$, то $P \ge 2\left(x+\frac{3600}{x}\right)$.

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$x+\frac{3600}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{3600}{x}}$, $x+\frac{3600}{x}\geq 120$, причем равенство достигается только при $x=\frac{3600}{x}$, т.е. $x=60$, поэтому наименьшее значение функции $f(x)=x+\frac{3600}{x}$ достигается при $x=60$, а $f(60)=120$. Следовательно, $P\geq 2\cdot 120$, $P\geq 240$. Т.е. наименьшее значение периметра участка $P=240$, $BK=60$, $KE=60$, $GH=20$.

Ответ: 240м, 60м, 60м, 20м.

Задание 6. (30 баллов) Найти решение система уравнений для всех положительных значений x,y, z

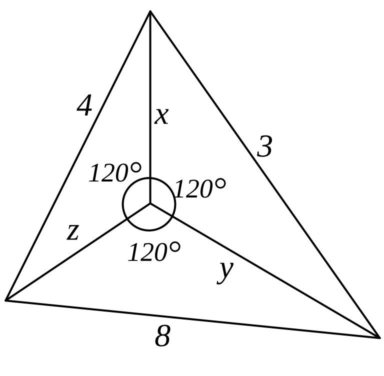
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9, \\ x^2+xz+z^2=16, \\ y^2+yz+z^2=64. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2=9, \\ x^2+xz+z^2=16, \\ y^2+yz+z^2=64 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x^2+y^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xy=3^2, \\ x^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xz=4^2, \\ y^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)yz=8^2. \end{cases}$

Т.к. $-\frac{1}{2}=\cos 120°$, то систему перепишем $\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 120°=3^2, \\ x^2+z^2-2xz\cos 120°=4^2, \\ y^2+z^2-2yz\cos 120°=8^2. \end{cases}$

Уравнения получившейся системы можно интерпретировать как теоремы косинусов для треугольников с углом в $120°$ и сторонами x и y, x и z, y и z, т.е.
первое уравнение: треугольник со сторонами x,y, 3;
второе уравнение: треугольник со сторонами x,z, 4;
третье уравнение: треугольник со сторонами y,z, 8.



Если существуют положительные решения x, y и z, то составится и объемлющий треугольник со сторонами 3,4,8. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система не имеет решение.

Ответ: в положительных числах система не имеет решений.