Математика. 9 класс.

Вариант-11

Задание 1. (5 баллов) Вычислить без калькулятора значение выражения A, если $A=\sqrt{2013\cdot 2015\cdot 2017\cdot 2019+16}$.

Решение.

Пусть $2016=x$, тогда $2013=x-3$, $2015=x-1$, $2017=x+1$, $2019=x+3$.

$\sqrt{2013\cdot 2015\cdot 2017\cdot 2019+16}=\sqrt{(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16}=$

$=\sqrt{(x^2-9)(x^2-1)+16}=\sqrt{x^4-10x+25}=\sqrt{(x^2-5)^2}=\left|x^2-5\right|=4064251.$

Ответ: 4064251.

Задание 2. (10 баллов) Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 5 часов, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.

Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки.

Пусть y минут – время, через которое стрелки часов встретятся. Тогда за это время часовая стрелка переместиться на x минут, а минутная стрелка – на $12x$ минут.

Учитывая, что первоначально между минутной и часовой стрелками было 25 минут, получаем систему уравнений: $\begin{cases} y=12x, \\ y=25+x. \end{cases}$

Тогда, $12x=25+x$, $x=2\frac{3}{11}$, а $y=25+2\frac{3}{11}=27\frac{3}{11}$, т.е. минутная стрелка догонит часовую стрелку через $27\frac{3}{11}$ минут.

Ответ: $27\frac{3}{11}$.

Задание 3. (15 баллов) Доказать, что уравнение $x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0$ не имеет решений.

Решение.

$x^4-4x^3+12x^2-24x+24=x^4-4x^3+4x^2+8x^2-24x+24=$

$(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=(x^2-2x)^2+8((x-1.5)^2+0.75)=$

$(x^2-2x)^2+8(x-1.5)^2+6\neq 0.$

Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать.

Задание 4. (20 баллов) Статистика знает всё. В одном городе 47,7% всех детей предпочитают электронные форматы книг; 15,1% – бумажные форматы книг, а оставшимся 37,2% детям безразлично, в каком формате книги. Статистика отдельно среди мальчиков такова: 33%, 20% и 47% соответственно. Сколько процентов девочек предпочитает книги в бумажном формате, если 63% из них предпочитают книги в электронном формате?

Решение.
Пусть в городе x мальчиков и y девочек, тогда $x+y$ – общее число детей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	Электронный формат	Бумажный формат	Безразлично, какой формат
$x+y$	47,7%	15,1%	37,2%
x	33%	20%	47%
y	63%	?	?

Используя данные второго столбца таблицы, запишем соотношение «по электронному формату»: $0{,}477(x+y)=0{,}33x+0{,}63y$.
Отсюда получим $0{,}147x=0{,}153y$ или $49x=51y$.

Пологая $m=\dfrac{x}{51}=\dfrac{y}{49}$, тогда $x=51m$, $y=49m$,
а разность $0{,}151(x+y)-0{,}2x=15{,}1m-10{,}2m=4{,}9m$ дает число девочек, которые предпочитает книги в бумажном формате.
Разделим эту разность на y и умножим на 100%, получим искомый результат: $\dfrac{4{,}9m}{49m}\cdot 100\%=10\%$.

Ответ. 10%

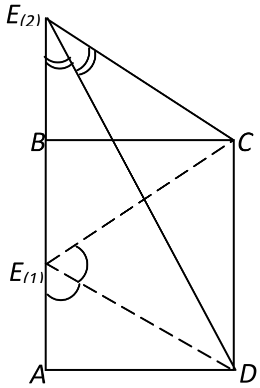
Задание 5. (20 баллов) Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств: $\begin{cases} x+y=a+1, \\ xy=a^2-7a+16. \end{cases}$ Найти при каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

Решение.
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2(a^2-7a+16)=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33$.
Откуда получаем, что при $a=8$ искомая сумма принимает наибольшее значение, равное 33.
Далее, учитывая условие существования действительных чисел, удовлетворяющих системе равенств, решим систему относительно x. Получим:
$x^2-(a+1)x+a^2-7a+16=0$,
$D=(a+1)^2-4(a^2-7a+16)=-3a^2+30a-63$,
$-3a^2+30a-63\ge 0$,
Откуда, $3\le a\le 7$.
На промежутке $3\le a\le 7$ функция $f(a)=-(a-8)^2+33$ возрастает и наибольшее значение достигает при $a=7$ и равно 32.

Ответ: $a=7$.

Задание 6. (30 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ $AB=2$ и $BC=\sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найти AE.

Решение.



Неопределенным моментом этой задачи является расположение точки E на прямой относительно двух данных на ней точек A и B.

Рассмотрим случаи:

1. Если точка E на прямой лежит между точками A и B, то $AE=1$.

По свойству параллельных прямых $\angle AED=\angle EDC$, следовательно, ΔDEC – равнобедренный и $EC=CD=2$. Из прямоугольного треугольника BEC с гипотенузой $EC=2$ и катетом $BC=\sqrt{3}$ по теореме Пифагора найдем BE: $BE=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$.

2. Если точка B на прямой лежит между точками A и E, то $AE=3$.

3. Положение точки A между точками B и E невозможно, т.к. в этом случае $\angle AED>\angle DEC$, т.е. не выполняется условие задачи.

Ответ: 1 или 3.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить без калькулятора значение выражения A, если

$$A = \sqrt{2012 \cdot 2014 \cdot 2016 \cdot 2018 + 16}.$$

Решение.
Пусть $2015 = x$, тогда $2012 = x - 3$, $2014 = x - 1$, $2016 = x + 1$, $2018 = x + 3$.
$\sqrt{2012 \cdot 2014 \cdot 2016 \cdot 2018 + 16} = \sqrt{(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16} =$
$= \sqrt{(x^2 - 9)(x^2 - 1) + 16} = \sqrt{x^4 - 10x + 25} = \sqrt{(x^2 - 5)^2} = \left|x^2 - 5\right| = 4060220$.

Ответ: 4060220.

Задание 2. (10 баллов) Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.
Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки.
Пусть y минут – время, через которое стрелки часов встретятся. Тогда за это время часовая стрелка переместиться на x минут, а минутная стрелка – на $12x$ минут.
Учитывая, что первоначально между минутной и часовой стрелками было 15 минут, получаем систему уравнений: $\begin{cases} y = 12x, \\ y = 15 + x. \end{cases}$

Тогда, $12x = 15 + x$, $x = 1\frac{4}{11}$, а $y = 15 + 1\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$, т.е. минутная стрелка догонит часовую стрелку через $16\frac{4}{11}$ минут.

Ответ: $16\frac{4}{11}$.

Задание 3. (15 баллов) Доказать, что уравнение $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = 0$ не имеет решений.

Решение.
$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 4x + 9 = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 2x^2 - 4x + 9 =$
$= \left(\left(x^2\right)^2 - 2 \cdot 3x \cdot x^2 + (3x)^2\right) + 2\left(x^2 - 2x + 1 + 3{,}5\right) =$
$(x^2 - 3x)^2 + 2(x^2 - 2x + 1) + 7 = (x^2 - 3x)^2 + 2(x-1)^2 + 7 \neq 0$
Следовательно, уравнение не имеет действительных решений.

Что требовалось доказать

Задание 4. (20 баллов) Статистика знает всё. В одном городе 47,7% всех детей предпочитают электронные форматы книг; 15% – бумажные форматы книг, а оставшимся 37,3% детям безразлично, в каком формате книги. Статистика отдельно среди девочек такова: 23,4%, 28,5% и 48,1% соответственно. Сколько процентов мальчиков предпочитает книги в бумажном формате, если 53,1% из них предпочитают книги в электронном формате?

Решение.
Пусть в городе x девочек и y мальчиков, тогда $x+y$ – общее число детей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	Электронный формат	Бумажный формат	Безразлично, какой формат
$x+y$	47,7%	15%	37,3%
x	23,4%	28,5%	48,1%
y	53,1%	?	?

Используя данные второго столбца таблицы, запишем соотношение «по электронному формату»: $0{,}477(x+y)=0{,}234x+0{,}531y$.
Отсюда получим $0{,}243x=0{,}054y$ или $9x=2y$.

Положим $m=\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{9}$, тогда $x=2m$, $y=9m$,

а разность $0{,}15(x+y)-0{,}285x=1{,}65m-0{,}57m=1{,}08m$ дает число мальчиков, которые предпочитает книги в бумажном формате.
Разделим эту разность на y и умножим на 100%, получим искомый результат: $\dfrac{1{,}08m}{9m}\cdot 100\%=12\%$.

Ответ. 12%

Задание 5. (20 баллов) Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств: $\begin{cases} x+y=a-1, \\ xy=a^2-7a+14. \end{cases}$ Найти при каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

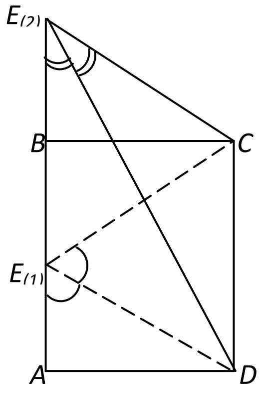
Решение.
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-2(a^2-7a+14)=-a^2+12a-27=-(a-6)^2+9$.
Откуда получаем, что при $a=6$ искомая сумма принимает наибольшее значение, равное 9.
Далее, учитывая условие существования действительных чисел, удовлетворяющих системе равенств, решим систему относительно х. Получим:
$x^2-(a-1)x+a^2-7a+14=0$,
$D=(a-1)^2-4(a^2-7a+14)=-3a^2+26a-55$,
$-3a^2+26a-55\geq 0$. Откуда $\dfrac{11}{3}\leq a\leq 5$.

На промежутке $\dfrac{11}{3}\leq a\leq 5$ функция $f(a)=-(a-6)^2+9$ возрастает и наибольшее значение достигает при $a=5$ и равно 8.

Ответ: $a=5$.

Задание 6. (30 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ $AB=5$ и $BC=4$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED=\angle DEC$. Найти AE.

Решение.



Неопределенным моментом этой задачи является расположение точки E на прямой относительно двух данных на ней точек A и B.

Рассмотрим случаи.

1. Если точка E на прямой лежит между точками A и B, то $AE=2$.

По свойству параллельных прямых $\angle AED=\angle EDC$, следовательно, ΔDEC – равнобедренный и $EC=CD=5$. Из прямоугольного треугольника BEC с гипотенузой $EC=5$ и катетом $BC=4$ по теореме Пифагора найдем BE: $BE=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

2. Если точка B на прямой лежит между точками A и E, то $AE=8$.

3. Положение точки A между точками B и E невозможно, т.к. в этом случае $\angle AED>\angle DEC$, т.е. не выполняется условие задачи.

Ответ: 2 или 8.