Математика. 9 класс.
Вариант-21

Задание 1. (5 баллов) Вычислить значение выражения A, если $A=49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\ldots}}}}$.

Решение.

$$A=49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\sqrt[3]{49\cdot\ldots}}}}=49^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots}=49^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\left(7^2\right)^{\frac{3}{2}}=7^3=343.$$

Ответ: 343.

Задание 2. (10 баллов) Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Определить, сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было.

Решение.

Так как стрелок попал в десятку 4 раза, то $90-4\cdot10=50$, т.е. на оставшиеся 6 выстрелов осталось 50 очков.

Так как стрелок попал в семерку, восьмерку и девятку в оставшиеся 6 выстрелов, то за три выстрела (1 раз в семерку, 1 раз в восьмерку, 1 раз в девятку) он набирает $7+8+9=24$ очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела стрелку необходимо набрать $50-24=26$ очков. Не сложно проверить, что это возможно при единственной комбинации: $26=8+9+9$.

Т.о., стрелок попал в семерку 1 раз, в восьмерку 2 раза и в девятку 3 раза.

Ответ. Стрелок попал в семерку 1 раз, в восьмерку 2 раза и в девятку 3 раза.

Задание 3. (15 баллов) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+ax+b=0$, а x_1-x_2 и x_1+x_2 – корни уравнения $x^2-bx+a^2=0$. Найти значения a и b.

Решение

По теореме Виета, $x_1+x_2=-a$, $x_1\cdot x_2=b$, $(x_1-x_2)+(x_1+x_2)=2x_1=b$,

$(x_1-x_2)(x_1+x_2)=x_1{}^2-x_2{}^2=a^2$.

Следовательно, $x_1\cdot x_2=2x_1$, $x_1\cdot x_2-2x_1=0$, $x_1(x_2-2)=0$. Тогда $x_1=0$ или $x_2=2$.

Если $x_1=0$, то $b=0$, $a^2=-x_2{}^2$; $a^2\ge0$, а $-x_2{}^2\le0$, следовательно $a=0$.

Если $x_2=2$, то $x_1+2=-a$, $x_1{}^2-4=a^2$.

Следовательно, $x_1{}^2-4=x_1{}^2+4x_1+4$, $4x_1=-8$, $x_1=-2$, $a=0$, $b=-4$.

Ответ: $a=0$, $b=0$;
$a=0$, $b=-4$.

Задание 4. (20 баллов) Статистика знает все. Опрос взрослых жителей одного города показал, что 10% всех мужчин предпочитают пить чай из чашек, 30% – из бокалов, а для остальных 60% мужчин посуда значения не имеет. Статистика среди женщин такова: 40, 15 и 45% соответственно. Сколько процентов всех взрослых жителей города предпочитают пить чай из чашек, если для 52,2% из них посуда не имеет значения?

Решение.
Пусть в городе x мужчин и y женщин, тогда $x+y$ – общее число взрослых жителей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	Чашки	Бокалы	Посуда не имеет значения
x	10%	30%	60%
y	40%	15%	45%
$x+y$	?	?	52,2%

Используя данные третьего столбца таблицы, запишем соотношение «посуда не имеет значения»: $0{,}522(x+y)=0{,}6x+0{,}45y$. Отсюда получим, $0{,}078x=0{,}072y$ или $13x=12y$. Полая $m=\dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{13}$, тогда $x=12m$, $y=13m$, а сумма $0{,}1x+0{,}4y=6{,}4m$ дает число всех взрослых жителей, которые предпочитают пить чай из чашек. Разделив эту сумму на $x+y$ и умножив на 100%, получим искомый результат: $\dfrac{6{,}4m}{25m}\cdot 100\%=25{,}6\%$.

Ответ. 25.6%

Задание 5. (20 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases}2x-xy+2y=6,\\ x^2+y^2-3xy=5.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}2x-xy+2y=6,\\ x^2+y^2-3xy=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ x^2+2xy+y^2-5xy=5;\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ (x+y)^2-5xy=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-10(x+y)+5xy=-30,\\ (x+y)^2-5xy=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ (x+y)^2-10(x+y)=-25;\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ (x+y)^2-10(x+y)+25=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ (x+y-5)^2=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2(x+y)-xy=6,\\ (x+y-5)^2=0;\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2\cdot 5-xy=6,\\ x+y=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy=4,\\ x+y=5;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=5-x,\\ x(5-x)=4;\end{cases}$$

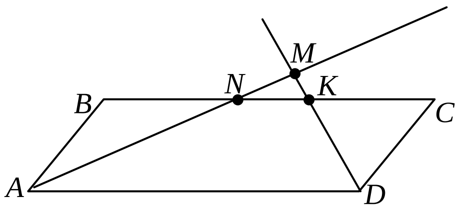
$$\Rightarrow \begin{cases}y=5-x,\\ x^2-5x+4=0;\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=4;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=4,\\ y_2=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

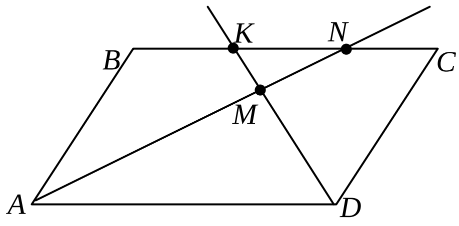
Ответ. $(1;4)$ или $(4;1)$.

Задание 6. (30 баллов) Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найти длины сторон параллелограмма, если его периметр равен 40.

Решение.

Обозначим точку пересечения биссектрис M, а точки пересечения биссектрис AM и DM со стороной BC через N и K соответственно. В зависимости от расположения точки M относительно прямой (отрезка) BC возможны два варианта решения задачи (см. рисунок).





Рассмотрим случаи:

1. Пусть точка M расположена вне параллелограмма. Т.к. биссектриса AM отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABN, то $AB = BN = NK = KC = x$, $AB = x$, $BC = 3x$. Периметр параллелограмма равен 40, поэтому $2(AB + BC) = 40$, $2(x + 3x) = 40$, $4x = 20$, $x = 5$, т.о. $AB = 5$, $BC = 15$.

2. Пусть точка M расположена внутри параллелограмма, $NC = x$, $AB = BN = 2x$, $BC = 3x$. Периметр параллелограмма равен 40, поэтому $2(AB + BC) = 40$, $2(2x + 3x) = 40$, $5x = 20$, $x = 4$, т.о. $AB = 8$, $BC = 12$.

Ответ. 5 и 15;
8 и 12.

Математика. 9 класс.
Вариант-22

Задание 1. (5 баллов) Вычислить значение выражения A, если

$$A=81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\ldots}}}}.$$

Решение.

$$A=81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\sqrt[3]{81\cdot\ldots}}}}=81^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots}=81^{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\left(9^2\right)^{\frac{3}{2}}=9^3=729.$$

Ответ: 729.

Задание 2. (10 баллов) Стрелок 10 раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Определить, сколько попаданий было в семерку, восьмерку и десятку, если девяток было пять, а других попаданий и промахов не было.

Решение.

Так как стрелок попал в девятку 5 раз, то $90-5\cdot 9=45$, т.е. на оставшиеся 5 выстрелов осталось 45 очков.

Так как стрелок попал в семерку, восьмерку и десятку в оставшиеся 5 выстрелов, то за три выстрела (1 раз в семерку, 1 раз в восьмерку, 1 раз в десятку) он набирает $7+8+10=25$ очков. Тогда за оставшиеся 2 выстрела стрелку необходимо набрать $45-25=20$ очков.

Не сложно проверить, что это возможно при единственной комбинации: $20=10+10$.

Т.о., стрелок попал в семерку 1 раз, в восьмерку 1 раза и в десятку 3 раза.

Ответ. Стрелок попал в семерку 1 раз, в восьмерку 1 раз и в десятку 3 раза.

Задание 3. (15 баллов) Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+ax+b=0$, а x_1 и $2x_2$ – корни уравнения $x^2+3bx+a=0$. Найти значения a и b.

Решение

По теореме Виета, $x_1+x_2=-a$, $x_1\cdot x_2=b$, $x_1+2x_2=-3b$, $2x_1x_2=a$.

Следовательно, $2b=a$ и $(x_1+x_2)-(x_1+2x_2)=-x_2=x_1x_2$.

$x_2+x_1x_2=0$, $x_2(x_1+1)=0$. Тогда $x_1=-1$ или $x_2=0$.

Если $x_2=0$, то $b=0$, следовательно, $a=0$.

Если $x_1=-1$, то $-1+x_2=-2\cdot(-1)\cdot x_2$, $x_2=-1$.

Следовательно, $a=2$, $b=1$.

Ответ: $a=0$, $b=0$;
$a=2$, $b=1$.

Задание 4. (20 баллов) Статистика знает все. Опрос взрослых жителей одного города показал, что 10% всех женщин предпочитают пить чай из чашек, 20% – из бокалов, а для остальных 70% женщин посуда значения не имеет. Статистика среди мужчин такова: 20, 35 и 45% соответственно. Сколько процентов всех взрослых жителей города предпочитают пить чай из чашек, если для 50% из них посуда не имеет значения?

Решение.

Пусть в городе x женщин и y мужчин, тогда $x+y$ – общее число взрослых жителей. Составим по условиям задачи следующую таблицу:

	Чашки	Бокалы	Посуда не имеет значения
x	10%	20%	70%
y	20%	35%	45%
$x+y$	?	?	50%

Используя данные третьего столбца таблицы, запишем соотношение «посуда не имеет значения» $0{,}5(x+y)=0{,}7x+0{,}45y$. Отсюда получим, $0{,}2x=0{,}05y$ или $4x=y$.

Полая $m=x=\frac{y}{4}$, тогда $x=m$, $y=4m$, а сумма $0{,}1x+0{,}2y=0{,}9m$ дает число всех взрослых жителей, которые предпочитают пить чай из чашек.

Разделив эту сумму на $x+y$ и умножив на 100%, получим искомый результат: $\frac{0{,}9m}{5m}\cdot 100\%=18\%$.

Ответ: 18%

Задание 5. (20 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases} x+3xy+y=9, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x+3xy+y=9, \\ x^2+y^2+xy=7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ x^2+2xy+y^2-xy=7; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ (x+y)^2-xy=7; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ 3(x+y)^2-3xy=21; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ 3(x+y)^2+(x+y)=30; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ 3(x+y)^2+(x+y)-30=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)+3xy=9, \\ 3\left(x+y+\frac{10}{3}\right)(x+y-3)=0; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=\frac{37}{9}, \\ x+y=-\frac{10}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x\left(x+\frac{10}{3}\right)=\frac{37}{9}, \\ y=-\left(x+\frac{10}{3}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} x(3-x)=2, \\ y=3-x; \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 9x^2+30x+37=0, \\ y=-\left(x+\frac{10}{3}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ y=3-x; \end{cases} \end{array} \right.$$

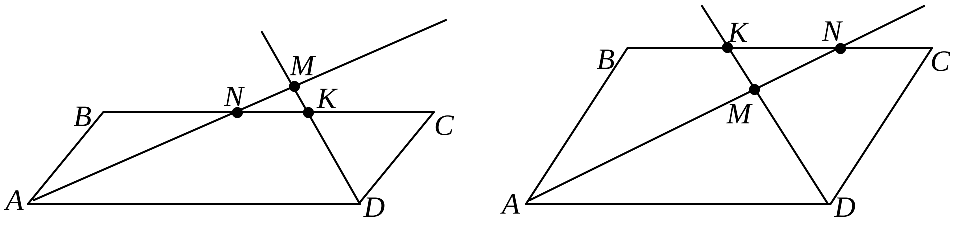
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \text{система не имеет} \\ \text{решения} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ y=3-x; \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0, \\ y=3-x; \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=2, \\ y_2=1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ. $(1;2)$ или $(2;1)$.

Задание 6. (30 баллов) Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы его углов A и D делят сторону BC на три равные части. Найти длины сторон параллелограмма, если его периметр равен 56.

Решение.

Обозначим точку пересечения биссектрис M, а точки пересечения биссектрис AM и DM со стороной BC через N и K соответственно. В зависимости от расположения точки M относительно прямой (отрезка) BC возможны два варианта решения задачи (см. рисунок).



Рассмотрим случаи:

1. Пусть точка M расположена вне параллелограмма. Т.к. биссектриса AM отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABN, то $AB = BN = NK = KC = x$, $AB = x$, $BC = 3x$. Периметр параллелограмма равен 40, поэтому $2(AB + BC) = 56$, $2(x + 3x) = 56$, $4x = 27$, $x = 7$, т.о. $AB = 7$, $BC = 21$.

2. Пусть точка M расположена внутри параллелограмма, $NC = x$, $AB = BN = 2x$, $BC = 3x$. Периметр параллелограмма равен 40, поэтому $2(AB + BC) = 56$, $2(2x + 3x) = 56$, $5x = 28$, $x = 5{,}6$, т.о. $AB = 11{,}2$, $BC = 16{,}8$.

Ответ. 7 и 21;
11,2 и 16,8.