Математика. 11 класс.
Вариант-21

Задание 1. (5 баллов) Для функции $y = e^{-x}$ найти производную 2018-го порядка ($y^{(2018)}$).

Решение.

$y' = -e^{-x}$,

$y'' = e^{-x}$,

$y''' = -e^{-x}$,

…

$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x}$.

Тогда, $y^{(2018)} = (-1)^{2018} e^{-x} = e^{-x}$.

Ответ: $y^{(2018)} = e^{-x}$.

Задание 2. (10 баллов) Вычислить значение выражения A, если

$$A = \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Решение.

Пусть $\arcsin\frac{4}{5} = a$, $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{4}{5}$, $\cos a > 0$;

$\arccos\frac{7}{25} = b$, $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos b = \frac{7}{25}$.

Следовательно, $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$. Тогда, $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{4}{3}$, $a = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

$\cos(\pi - 2a) = -\cos 2a = 2\sin^2 a - 1 = 2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$.

Следовательно, $\cos(\pi - 2a) = \cos b$, $b = \pi - 2a$ и все выражение равно

$A = \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = a + b + a = a + \pi - 2a + a = \pi$

Ответ. $A = \pi$.

Задание 3. (15 баллов) Была проведена проверка на соответствие стандартам партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандартам, оказалось в интервале от 95,2% до 98,2%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

Решение

Количество деталей, не соответствующих стандартам, колеблется в пределах от 1,8% до 4,8% от общего количества деталей. Если N - количество деталей в партии, то это означает, что найдется натуральное число (деталей, не соответствующих стандартам) x:

$$0{,}018N < x < 0{,}048N$$

$$\begin{cases} 0{,}048N > x, \\ 0{,}018N < x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x}{0{,}048}, \\ N < \dfrac{x}{0{,}018}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x \cdot 1000}{48}, \\ N < \dfrac{x \cdot 1000}{18}; \end{cases}$$

$$\frac{125x}{6} < N < \frac{500x}{9},$$

$$20\frac{5}{6}x < N < 55\frac{5}{9}x$$

Наименьшее возможное число N достигается при $x = 1 \Rightarrow N = 21$.

Ответ: 21.

Задание 4. (20 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3, \\ 2xy - 8x = x^2(y-4) + 1. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ. $y-4>0$, $y>4$.

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = \dfrac{3x \cdot \ln(y-4)}{\ln 125} - 2x^3, \\ 2xy - 8x = x^2(y-4) + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - 2x^2 = 3x \cdot \log_{125}(y-4) - 2x^3, \\ x^2(y-4) - 2x(y-4) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_5(y-4) - x \cdot \log_5(y-4) = 2x^2 - 2x^3, \\ x^2(y-4) - 2x(y-4) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5(y-4)(x^2 - x) = -2x^2(x-1), \\ (y-4)(x^2-2x) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1)(\log_5(y-4) + 2x) = 0, \\ (y-4)(x^2-2x) = -1; \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x = 0, \\ (y-4)\cdot 0 = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0, \\ 0 \neq -1; \end{cases}$

Нет решений

2) $\begin{cases} x - 1 = 0, \\ (y-4)(x^2-2x) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ -(y-4) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ y-4 = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1, \\ y = 5; \end{cases}$

$(1;5)$.

3) $\begin{cases} \log_5(y-4) + 2x = 0, \\ (y-4)(x^2-2x) = -1; \end{cases}$

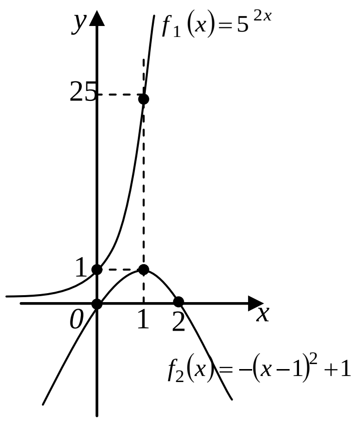
$\begin{cases} y = 5^{-2x} + 4, \\ (y-4)(x^2-2x) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 5^{-2x} + 4, \\ 5^{-2x}(x^2-2x) = -1; \end{cases}$

$5^{2x} = -x^2 + 2x$,

$5^{2x} = -(x-1)^2 + 1$.

Графики функций $f_1(x) = 5^{2x}$, $f_2(x) = -(x-1)^2 + 1$ не пересекаются, т.е. решений нет.



Т.о. система уравнений имеет одно решение $(1;5)$.

Ответ: $(1;5)$.

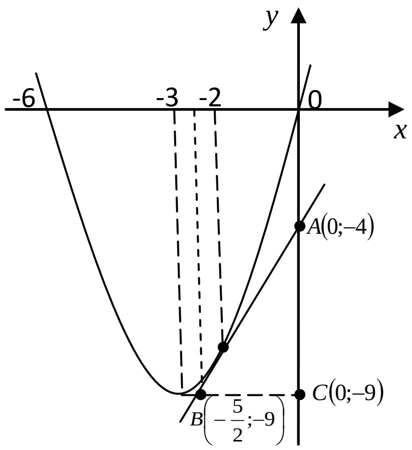
Задание 5. (20 баллов) К графику функции $y(x) = 6x + x^2$ проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0 = -2$, вторая – в точке минимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными.

Решение

Графиком функции $y(x) = 6x + x^2 = (x+3)^2 - 9$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $(-3;-9)$. Т.е. точкой минимума параболы является ее вершина, то абсциссой точки минимума функции $y(x) = 6x + x^2$ является $x_1 = -3$.

Уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

$y' = \left(6x + x^2\right)' = 6 + 2x$. Т.к. $y'(-3) = 6 + 2\cdot(-3) = 0$ и $y(-3) = 6\cdot(-3) + (-3)^2 = -9$, то уравнение касательной в точке $x_1 = -3$ имеет вид $y = -9$. Т.к. $y'(-2) = 6 + 2\cdot(-2) = 2$ и $y(-2) = 6\cdot(-2) + (-2)^2 = -8$, то уравнение касательной в точке $x_0 = -2$ имеет вид $y + 8 = 2(x+2)$, или $y = 2x - 4$.



Из системы уравнений $\begin{cases} y = -9, \\ y = 2x - 4 \end{cases}$ находим координаты точки пересечения касательных к параболе: $B\left(-\frac{5}{2};-9\right)$.

Касательная $y = -9$ пересекает ось Oy в точке $C(0;-9)$, касательная $y = 2x - 4$ пересекает ось Oy в точке $A(0;-4)$. Искомая площадь есть площадь треугольника ABC, поэтому $S = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|$. Т.к. $|AC| = |-9-(-4)| = 5$, $|BC| = \left|-\frac{5}{2} - 0\right| = \frac{5}{2}$, то $S = \frac{25}{4}$.

Ответ. $\frac{25}{4}$.

Задание 6. (30 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases} x^8 + y^8 + z^8 = 1, \\ x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \{x^4; y^4; z^4\}$ и вектор $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$.

Тогда, $|\vec{a}| = \sqrt{x^8 + y^8 + z^8} = \sqrt{1} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

Скалярное произведение векторов равно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{14} \cdot \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их координаты равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x^4 - 2y^4 + 3z^4 = \sqrt{42}.$$

Тогда, $\sqrt{42} = \sqrt{14} \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}} > 1$.

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

Ответ. Система уравнений не имеет решений.

Задание 1. (5 баллов) Для функции $y = xe^x$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение.

$y' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

$y'' = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2)$,

$y''' = e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$,

…

$y^{(n)} = e^x(x+n)$.

Тогда, $y^{(2019)} = e^x(x+2019)$.

Ответ: $y^{(2019)} = e^x(x+2019)$.

Задание 2. (10 баллов) Вычислить значение выражения A, если

$$A = \arcsin\frac{24}{25} + \arccos\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Решение.

Пусть $\arcsin\frac{24}{25} = a$, $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{24}{25}$, $\cos a > 0$;

$\arccos\frac{3}{5} = b$, $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos b = \frac{3}{5}$, $\sin b > 0$.

Следовательно, $\sin b = \sqrt{1-\cos^2 b} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. Тогда, $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{4}{3}$,

$a = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \arccos\frac{3}{5} = b$.

Так как $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a = \frac{24}{25}$, $\sin(\pi - 2b) = \sin 2b = 2\sin b\cos b = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$, то, следовательно, $\sin a = \sin(\pi - 2b)$, $a = \pi - 2b$ и все выражение равно

$$A = \arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{7}{25} + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = a + b + b = \pi - 2b + b + b = \pi$$

Ответ. $A = \pi$.

Задание 3. (15 баллов) Была проведена проверка на соответствие стандартам партии деталей. Количество деталей, соответствующих стандартам, оказалось в интервале от 97,3% до 98,4%. Найти наименьшее возможное количество деталей в этой партии.

Решение.

Количество деталей, не соответствующих стандартам, колеблется в пределах от 1,6% до 2,7% от общего количества деталей. Если N - количество деталей в партии, то это означает, что найдется натуральное число (деталей, не соответствующих стандартам) x:

$$0{,}016N < x < 0{,}027N$$

$$\begin{cases} 0{,}027N > x, \\ 0{,}016N < x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x}{0{,}027}, \\ N < \dfrac{x}{0{,}016}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N > \dfrac{x \cdot 1000}{27}, \\ N < \dfrac{x \cdot 1000}{16}; \end{cases}$$

$$\frac{1000x}{27} < N < \frac{125x}{2},$$

$$37\frac{1}{27}x < N < 62\frac{1}{2}x$$

Наименьшее возможное число N достигается при $x = 1 \Rightarrow N = 38$.

Ответ: 38.

Задание 4. (20 баллов) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) + 0{,}5x^3 = \dfrac{6x \cdot \ln(y+7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1. \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ. $y+7>0$, $y>-7$.

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) + 0{,}5x^3 = \dfrac{6x \cdot \ln(y+7)}{\ln 27} + x^2, \\ 4xy + 28x - 3y - 21 = x^2(y+7) + 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) + 0{,}5x^3 = 6x \cdot \log_{27}(y+7) + x^2, \\ x^2(y+7) - 4x(y+7) + 3(y+7) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \cdot \log_3(y+7) - 2x \cdot \log_3(y+7) = -0{,}5x^3 + x^2, \\ x^2(y+7) - 4x(y+7) + 3(y+7) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_3(y+7)(x^2 - 2x) = -0{,}5x^2(x-2), \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-2)(\log_3(y+7) + 0{,}5x) = 0, \\ (y+7)(x^2 - 4x + 3) = -1; \end{cases}$$

1) $\begin{cases} x=0, \\ 3(y+7) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=0, \\ y+7 = -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

$\begin{cases} x=0, \\ y = -7\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

Не входит в ОДЗ.

2) $\begin{cases} x-2=0, \\ (y+7)(x^2-4x+3) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=2, \\ -(y+7) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=2, \\ y+7 = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=2, \\ y = -6; \end{cases}$

$(2;-6)$.

3) $\begin{cases} \log_3(y+7) + 0{,}5x = 0, \\ (y+7)(x^2-4x+3) = -1; \end{cases}$

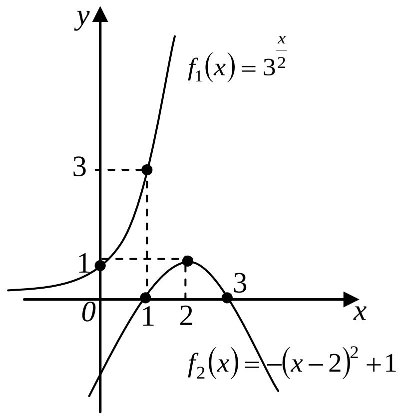
$\begin{cases} y = 3^{-0{,}5x} - 7, \\ (y+7)(x^2-4x+3) = -1; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 3^{-0{,}5x} - 7, \\ 3^{-0{,}5x}(x^2-4x+3) = -1; \end{cases}$

$3^{0{,}5x} = -x^2 + 4x - 3$,

$3^{\frac{x}{2}} = -(x-2)^2 + 1$.

Графики функций $f_1(x) = 3^{\frac{x}{2}}$, $f_2(x) = -(x-2)^2 + 1$ не пересекаются, т.е. решений нет.



Т.о. система уравнений имеет одно решение $(2;-6)$.

Ответ: $(2;-6)$.

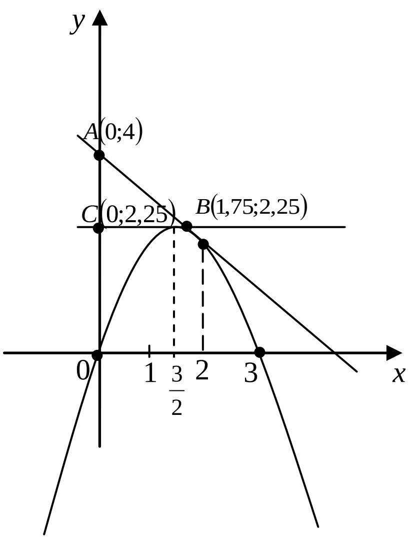
Задание 5. (20 баллов) К графику функции $y(x)=3x-x^2$ проводятся две касательные. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=2$, вторая – в точке максимума данной функции. Найти площадь треугольника, образованного осью ординат и двумя этими касательными.

Решение

Графиком функции $y(x)=3x-x^2=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$ является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина находится в точке $\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right)$. Т.к. точкой максимума параболы является ее вершина, то абсциссой точки максимума функции $y(x)=3x-x^2$ является $x_1=\frac{3}{2}$.

Уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 имеет вид $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$.

$y'=\left(3x-x^2\right)'=3-2x$. Т.к. $y'\left(\frac{3}{2}\right)=3-2\cdot\frac{3}{2}=0$ и $y\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^2=2{,}25$, то уравнение касательной в точке $x_1=\frac{3}{2}$ имеет вид $y=2{,}25$. Т.к. $y'(2)=3-2\cdot2=-1$ и $y(2)=3\cdot2-2^2=2$, то уравнение касательной в точке $x_0=2$ имеет вид $y-2=-(x-2)$, или $y=-x+4$.



Из системы уравнений $\begin{cases} y=2{,}25, \\ y=-x+4 \end{cases}$ находим координаты точки пересечения касательных к параболе: $B(1{,}75;2{,}25)$.

Касательная $y=2{,}25$ пересекает ось Oy в точке $C(0;2{,}25)$, касательная $y=-x+4$ пересекает ось Oy в точке $A(0;4)$. Искомая площадь есть площадь треугольника ABC, поэтому $S=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|AC|$. Т.к. $|AC|=|2{,}25-4|=1{,}75$, $|BC|=|1{,}75-0|=1{,}75$, то $S=\frac{49}{32}$.

Ответ. $\frac{49}{32}$.

Задание 6. (30 баллов) Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 1, \\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \sqrt{30}. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим вектор $\vec{a} = \{x^2; y^2; z^2\}$ и вектор $\vec{b} = \{2; 3; 4\}$.

Тогда, $|\vec{a}| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4} = \sqrt{1} = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$.

Скалярное произведение векторов равно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = 1 \cdot \sqrt{29} \cdot \cos\alpha$, где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение этих же векторов, выраженное через их координаты равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \sqrt{30}.$$

Тогда, $\sqrt{30} = \sqrt{29} \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{29}} > 1$.

Полученное противоречие показывает, что система не имеет решений.

Ответ. Система уравнений не имеет решений.