Математика. 10 класс.

Вариант-11

Задание 1. (5 баллов) Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 5 часов, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.

Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки.

Пусть y минут – время, через которое стрелки часов встретятся. Тогда за это время часовая стрелка переместиться на x минут, а минутная стрелка – на $12x$ минут.

Учитывая, что первоначально между минутной и часовой стрелками было 25 минут, получаем систему уравнений: $\begin{cases} y = 12x, \\ y = 25 + x. \end{cases}$

Тогда, $12x = 25 + x$, $x = 2\frac{3}{11}$, а $y = 25 + 2\frac{3}{11} = 27\frac{3}{11}$, т.е. минутная стрелка догонит часовую стрелку через $27\frac{3}{11}$ минут.

Ответ: $27\frac{3}{11}$..

Задание 2. (10 баллов) Сравнить выражения A и B, если $A = \sqrt{2018} + \sqrt{2020}$, $B = 2\sqrt{2019}$.

Решение.

Найдем разность $A - B$.

$$A - B = \sqrt{2018} + \sqrt{2020} - 2\sqrt{2019} = \sqrt{2018} + \sqrt{2020} - \sqrt{2019} - \sqrt{2019} =$$

$$= \left(\sqrt{2020} - \sqrt{2019}\right) - \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2020} + \sqrt{2019}} - \frac{1}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}} = \frac{\sqrt{2019} + \sqrt{2018} - \sqrt{2020} - \sqrt{2019}}{(\sqrt{2020} + \sqrt{2019})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})} =$$

$$= \frac{\sqrt{2018} - \sqrt{2020}}{(\sqrt{2020} + \sqrt{2019})(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})} < 0$$

Т.к. $A - B < 0$, то $A < B$, т.е. $\sqrt{2018} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2019}$.

Ответ. $\sqrt{2018} + \sqrt{2020} < 2\sqrt{2019}$.

Задание 3. (15 баллов). Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств: $\begin{cases} x + y = a + 1, \\ xy = a^2 - 7a + 16. \end{cases}$ Найти при каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение.

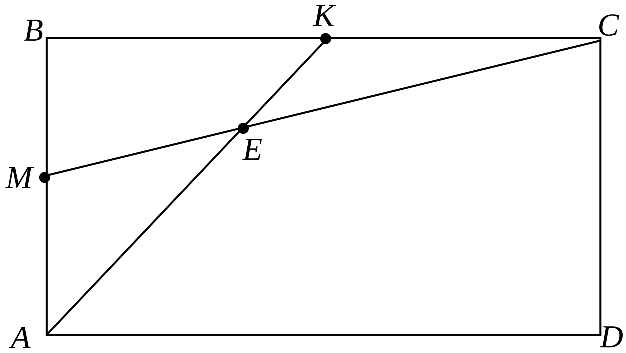
Решение.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a+1)^2-2(a^2-7a+16)=-a^2+16a-31=-(a-8)^2+33$.
Откуда получаем, что при $a=8$ искомая сумма принимает наибольшее значение, равное 33.
Далее, учитывая условие существования действительных чисел, удовлетворяющих системе равенств, решим систему относительно х. Получим:
$x^2-(a+1)x+a^2-7a+16=0$,
$D=(a+1)^2-4(a^2-7a+16)=-3a^2+30a-63$,
$-3a^2+30a-63\geq 0$,
Откуда, $3\leq a\leq 7$.
На промежутке $3\leq a\leq 7$ функция $f(a)=-(a-8)^2+33$ возрастает и наибольшее значение достигает при $a=7$ и равно 32.

Ответ: $a=7$.

Задание 4. (20 баллов) Дан прямоугольник $ABCD$. Точка M – середина стороны AB, точка K – середина стороны BC. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Сравнить площади четырехугольников $MBKE$ и $AECD$.

Решение.



Обозначим площадь четырехугольника $MBKE$ – S_1, а площадь четырехугольника $AECD$ – S_2. Четырехугольники $MBKE$ и $AECD$ подобны: $\angle MEK=\angle AEC$ (вертикальные), $\frac{AE}{EK}=\frac{CE}{EM}=\frac{2}{1}$ (медианы треугольника ABC точкой пересечения делятся в отношении 1:2). А отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, т.е. $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$. Значит, площадь четырехугольника $MBKE$ меньше площади четырехугольника $AECD$ в 4 раза.

Ответ. 4 раза

Задание 5. (20 баллов) Построить график функции

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4}\,.$$

Решение.

ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$y=\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}\cdot\sqrt{x^2-4x+4}$$

$$y=\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\cdot\sqrt{(x-2)^2}\ ,$$

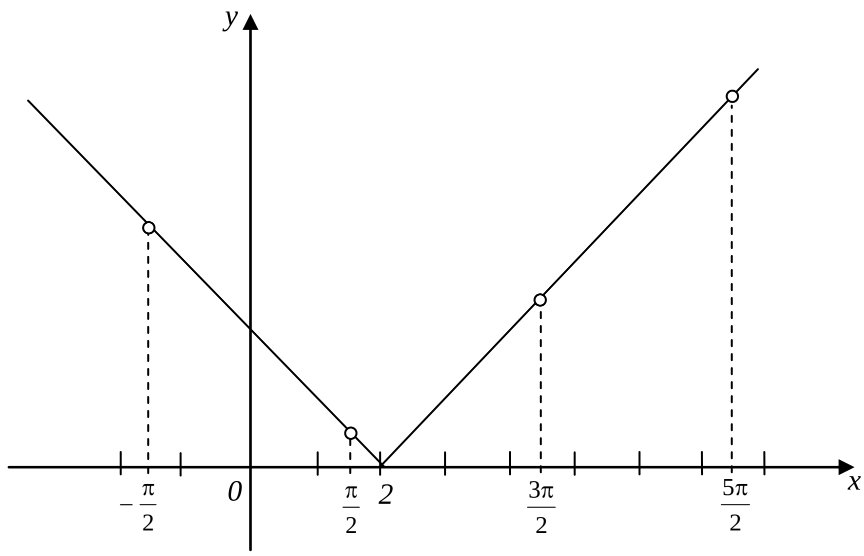
$$y=\left|\cos x\right|\cdot\left|\frac{1}{\cos x}\right|\cdot\left|x-2\right|,$$

$$y=\left|x-2\right|.$$

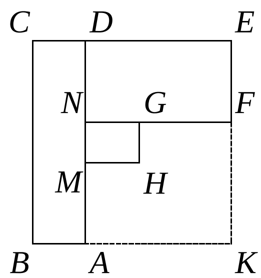
Т.о., учитывая ОДЗ $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$, запишем данную функцию в виде

$$y=\begin{cases}\left|x-2\right| \\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

и изобразим ее график (см. рисунок).



Задание 6. (30 баллов) Полевой лагерь геологов представляет собой участок площадью 1600 кв.м, состоящий из трех прямоугольных частей различного назначения и имеет форму многоугольника $ABCEFGHM$ (см. рисунок). В данном многоугольнике: $MA = GF = 20$ м, $MH = 15$ м и $GH \geq 10$ м. Вокруг лагеря необходимо выставить ограждение. Найти наименьшую длину ограждения такого участка и возможные значения длин сторон BK, KE и GH, при которых длина ограждения полевого лагеря является наименьшей.



Решение.

Площадь участка $ABCEFGHM$ $S_{ABCEFGHM} = 1600\text{м}^2$, а его периметр равен периметру прямоугольника $BCEK$. Обозначим $BK = x$, $KE = y$, $GH = z$. Тогда периметр $P = 2(x + y)$, $z \geq 10$ и $S_{BCEK} = xy = S_{ABCEFGHM} + FG \cdot GH + (MH + GF) \cdot MA = 1600 + 20z + 700 = 2300 + 20z$.

Т.к. $GH \geq 10$, то $S_{BCEK} \geq 1600 + 200 + 700$, $S_{BCEK} \geq 2500$, т.е $2300 + 20z \geq 2500$. Т.о., $xy \geq 2500$.

Поэтому, $y \geq \frac{2500}{x}$, и, т.к. $P = 2(x + y)$, то $P \geq 2\left(x + \frac{2500}{x}\right)$.

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$x + \frac{2500}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2500}{x}}$, $x + \frac{2500}{x} \geq 100$, причем равенство достигается только при $x = \frac{2500}{x}$, т.е. $x = 50$, поэтому наименьшее значение функции $f(x) = x + \frac{2500}{x}$ достигается при $x = 50$, а $f(50) = 100$. Следовательно, $P \geq 2 \cdot 100$, $P \geq 200$. Т.е. наименьшее значение периметра участка $P = 200$, $BK = 50$, $KE = 50$, $GH = 10$.

Ответ: 200м, 50м, 50м, 10м.

Математика. 10 класс.

Вариант-12

Задание 1. (5 баллов) Определить, через сколько времени после того, как стрелки часов показали ровно 3 часа, минутная стрелка догонит часовую.

Решение.
Скорость минутной стрелки в 12 раз больше скорости часовой стрелки.
Пусть y минут – время, через которое стрелки часов встретятся. Тогда за это время часовая стрелка переместиться на x минут, а минутная стрелка – на $12x$ минут.
Учитывая, что первоначально между минутной и часовой стрелками было 15 минут, получаем систему уравнений: $\begin{cases} y = 12x, \\ y = 15 + x. \end{cases}$
Тогда, $12x = 15 + x$, $x = 1\frac{4}{11}$, а $y = 15 + 1\frac{4}{11} = 16\frac{4}{11}$, т.е. минутная стрелка догонит часовую стрелку через $16\frac{4}{11}$ минут.

Ответ: $16\frac{4}{11}$.

Задание 2. (10 баллов) Сравнить выражения A и B, если $A = \sqrt{2017} + \sqrt{2019}$, $B = 2\sqrt{2018}$.

Решение.
Найдем разность $A - B$.

$$A - B = \sqrt{2017} + \sqrt{2019} - 2\sqrt{2018} = \sqrt{2017} + \sqrt{2019} - \sqrt{2018} - \sqrt{2018} =$$
$$= \left(\sqrt{2019} - \sqrt{2018}\right) - \left(\sqrt{2018} - \sqrt{2017}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2019} + \sqrt{2018}} - \frac{1}{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}} = \frac{\sqrt{2018} + \sqrt{2017} - \sqrt{2019} - \sqrt{2018}}{(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})(\sqrt{2018} + \sqrt{2017})} =$$
$$= \frac{\sqrt{2017} - \sqrt{2019}}{(\sqrt{2019} + \sqrt{2018})(\sqrt{2018} + \sqrt{2017})} < 0.$$

Т.к. $A - B < 0$, то $A < B$, т.е. $\sqrt{2017} + \sqrt{2019} < 2\sqrt{2018}$.

Ответ. $\sqrt{2017} + \sqrt{2019} < 2\sqrt{2018}$.

Задание 3. (15 баллов) Действительные числа x, y, a таковы, что выполняется следующая система равенств: $\begin{cases} x+y=a-1, \\ xy=a^2-7a+14. \end{cases}$ Найти при каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

Решение.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-2(a^2-7a+14)=-a^2+12a-27=-(a-6)^2+9$.

Откуда получаем, что при $a=6$ искомая сумма принимает наибольшее значение, равное 9.

Далее, учитывая условие существования действительных чисел, удовлетворяющих системе равенств, решим систему относительно x. Получим:

$x^2-(a-1)x+a^2-7a+14=0$,

$D=(a-1)^2-4(a^2-7a+14)=-3a^2+26a-55$,

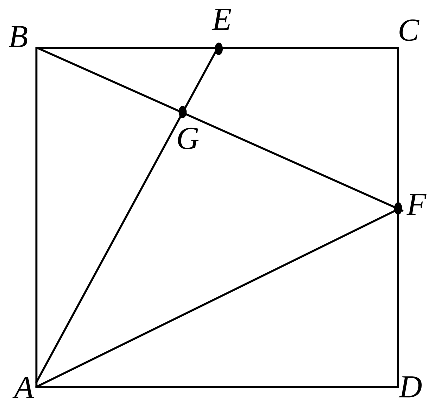
$-3a^2+26a-55\geq 0$. Откуда $\frac{11}{3}\leq a\leq 5$.

На промежутке $\frac{11}{3}\leq a\leq 5$ функция $f(a)=-(a-6)^2+9$ возрастает и наибольшее значение достигает при $a=5$ и равно 8.

Ответ: $a=5$.

Задание 4. (20 баллов) Дан квадрат $ABCD$. Точка E – середина стороны BC, точка F – середина стороны CD. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Сравнить площади четырехугольника $GECF$ и треугольника AGF.

Решение.



Обозначим площадь треугольника AGF - S_1, площадь четырехугольника $GECF$ - S_2, площадь квадрата $ABCD$ - S. Видно, что $S_1+S_2=S-\left(S_{ABE}+S_{AFD}\right)=\frac{S}{2}$ (треугольники ABE AFD образуют прямоугольник в полквадрата). Для сравнения площадей оценим знак разности площадей:

$S_1-S_2=\frac{S}{2}-S_2-S_2=\frac{S}{2}-2(S_{BCF}-S_{BEG})=\frac{S}{2}-2(\frac{S}{4}-S_{BEG})=2S_{BEG}>0$

Ответ. Площадь треугольника больше площади четырехугольника.

Задание 5. (20 баллов) Построить график функции $y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \pi n,\ n \in Z$.

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$y=\sqrt{1-\cos^2 x}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}\cdot\sqrt{x^2-6x+9}$,

$y=\sqrt{\sin^2 x}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}}\cdot\sqrt{(x-3)^2}$,

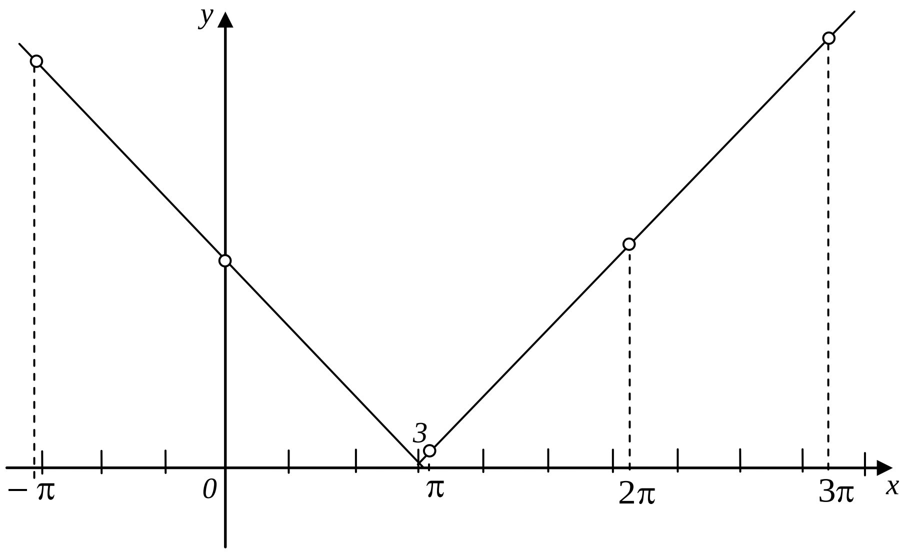
$y=|\sin x|\cdot\left|\dfrac{1}{\sin x}\right|\cdot|x-3|$,

$y=|x-3|$.

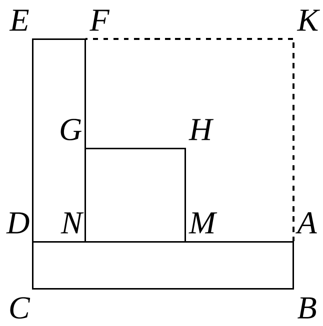
Т.о., учитывая ОДЗ $x \neq \pi n,\ n \in Z$, запишем данную функцию в виде

$$y=\begin{cases}|x-3|\\ x\neq \pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

и изобразим ее график (см. рисунок).



Задание 6. (30 баллов) Полевой лагерь геологов представляет собой участок площадью 2100 кв.м, состоящий из трех прямоугольных частей различного назначения и имеет форму многоугольника $ABCEFGHM$ (см. рисунок). В данном многоугольнике: $MA = 20$ м, $GF = 30$ м, $MH = 15$ м и $GH \geq 20$ м. Вокруг лагеря необходимо выставить ограждение. Найти наименьшую длину ограждения такого участка и возможные значения длин сторон BK, KE и GH, при которых длина ограждения полевого лагеря является наименьшей.



Решение.

Площадь участка $ABCEFGHM$ $S_{ABCEFGHM} = 2100\text{м}^2$, а его периметр равен периметру прямоугольника $BCEK$. Обозначим $BK = x$, $KE = y$, $GH = z$. Тогда периметр $P = 2(x + y)$, $z \geq 20$ и $S_{BCEK} = xy = S_{ABCEFGHM} + GF \cdot GH + (MH + GF) \cdot MA = 2100 + 30z + 900 = 3000 + 30z$.
Т.к. $z = GH \geq 20$, то $S_{BCEK} \geq 2100 + 600 + 900$, $S_{BCEK} \geq 3600$, т.е $3000 + 30z \geq 3600$. Т.о., $xy \geq 3600$.

Поэтому, $y \geq \dfrac{3600}{x}$, и, т.к. $P = 2(x + y)$, то $P \geq 2\left(x + \dfrac{3600}{x}\right)$.

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:
$x + \dfrac{3600}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \dfrac{3600}{x}}$, $x + \dfrac{3600}{x} \geq 120$, причем равенство достигается только при $x = \dfrac{3600}{x}$, т.е. $x = 60$, поэтому наименьшее значение функции $f(x) = x + \dfrac{3600}{x}$ достигается при $x = 60$, а $f(60) = 120$. Следовательно, $P \geq 2 \cdot 120$, $P \geq 240$. Т.е. наименьшее значение периметра участка $P = 240$, $BK = 60$, $KE = 60$, $GH = 20$.

Ответ: 240м, 60м, 60м, 20м.