Математика. 10 класс.
Вариант-31

Задание 1. (5 баллов) Турист отправляется в поход из пункта A в пункт B и обратно. Проходит весь путь за 4 часа 30 минут. Дорога из пункта A в пункт B идет сначала в гору, потом по ровному месту, затем под гору. Определить, на каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 3 км/ч, на ровном месте – 5 км/ч, при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние AB равно 10 км.

Решение.

Пусть x км пути турист проходит по ровному месту, тогда $(10-x)$ км пути (в гору и под гору) турист проходит дважды, один раз (каждый из участков подъема или спуска) со скоростью 3 км/ч, другой со скоростью 6 км/ч и затратит на этот путь $\frac{10-x}{3}$ и $\frac{10-x}{6}$ часов.

Т.к. по ровному месту турист идет $\frac{2x}{5}$ часов, а путь в оба конца проходит за 4 часа 30 минуту, то

$$\frac{2x}{5}+\frac{10-x}{3}+\frac{10-x}{6}=4\frac{1}{2}.$$

$$\frac{12x}{30}+\frac{10(10-x)}{30}+\frac{5(10-x)}{30}=\frac{135}{30},\qquad 12x+100-10x+50-5x=135,\qquad 150-3x=135,\qquad 3x=15,$$

$x=5$.

Ответ. 5.

Задание 2. (10 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right).$$

Решение.

Заметим, что выражение $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Проверим:

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2-\sqrt{2}},\qquad \frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{1},\qquad \frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2},\qquad \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.$$

Т.о., выражение $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$ - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.

Тогда $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots=\dfrac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(2-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+4.$

Следовательно, $A=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right)=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2=18-16=2.$

Ответ. 2.

Задание 3. (15 баллов) Доказать, что число $\dfrac{3^{2020^{2018}}-7^{20^{17}}}{10}$ целое.

Решение.

Последняя цифра числа 3^n зависит от показателя степени n и принимает значения 3, 9, 7, 1, причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 3^n есть 1 (единица). Число 7^n оканчивается на одну из цифр 7, 9, 3, 1, причем если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть 1 (единица).

Т.к. 20 делится на 4, то и 2020 делится на 4, следовательно, 2020^{2018} делится на 4 и 20^{17} делится на 4. Значит число $\dfrac{3^{2020^{2018}}-7^{20^{17}}}{10}$ – целое, т.е. в числителе дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются той же цифрой 1, поэтому числитель делиться на 10.

Что требовалось доказать.

Задание 4. (20 баллов) Производительность одного цеха автомобильных покрышек не превышает 2650 штук в сутки. Производительность второго цеха первоначально составляла 95% от производительности первого цеха. После ввода дополнительной линии во втором цехе производство покрышек увеличилось в сутки на 23% от числа покрышек, выпускаемых в сутки в первом цехе, и стали выпускать более 3000 штук в сутки. Сколько автомобильных покрышек за сутки выпускал каждый цех до реконструкции второго цеха? Предполагается, что каждый цех в сутки выпускает целое число автомобильных покрышек.

Решение.

Пусть x – количество автомобильных покрышек, производимых в сутки первым цехом. Тогда второй цех до реконструкции производил в сутки $\dfrac{95x}{100}$ автомобильных покрышек, а после ввода дополнительной линии стал выпускать $\dfrac{95x}{100}+\dfrac{23x}{100}$ автомобильных покрышек. Из условий задачи следует система неравенств:

$$\begin{cases} x \le 2650, \\ \dfrac{95x}{100}+\dfrac{23x}{100} > 3000. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $2542\dfrac{22}{159} < x \le 2650$. Так как числа $\dfrac{95x}{100}$ и $\dfrac{23x}{100}$ должны быть целыми, то x должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому $x = 2600$. Следовательно, первый завод выпускает в сутки 2600 автомобильных покрышек, а второй завод до реконструкции выпускал $\dfrac{95}{100}\cdot 2600 = 2470$ автомобилей.

Ответ. 2600 и 2470.

Задание 5. (20 баллов) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\dfrac{7-|x|}{|x|-2}\right| = a$ имеет ровно 4 корня.

Решение.

Укажем возможные значения параметра и переменной:

$$\left|\frac{7-|x|}{|x|-2}\right| = a\,,\ |x| \neq 2\,,\ |x| > 0\,,\ a > 0\,. \qquad (*)$$

Используя свойство модуля, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 7-|x| = a|x|-2a, \\ 7-|x| = -a|x|+2a; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x|(1+a) = 7+2a, \\ |x|(1-a) = 7-2a; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| = \dfrac{7+2a}{1+a}, \\ |x| = \dfrac{7-2a}{1-a}; \end{array}\right.$$

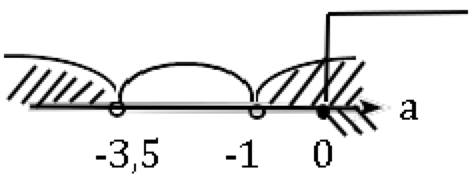
Т.о., получаем 4 решения системы:

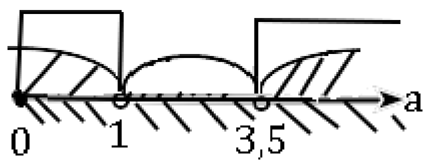
$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{7+2a}{1+a}, \\ x = \pm\dfrac{7-2a}{1-a}; \end{array}\right.$$

Проверим выполнение условия (*)

$$\begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{7+2a}{1+a} > 0, \\ \dfrac{7-2a}{1-a} > 0; \end{cases}$$

Решая каждое неравенство методом интервалов, получаем





$$\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a > 3{,}5; \\ a < 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > -1, \\ a < -3{,}5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Т.о., $a > 3{,}5$.

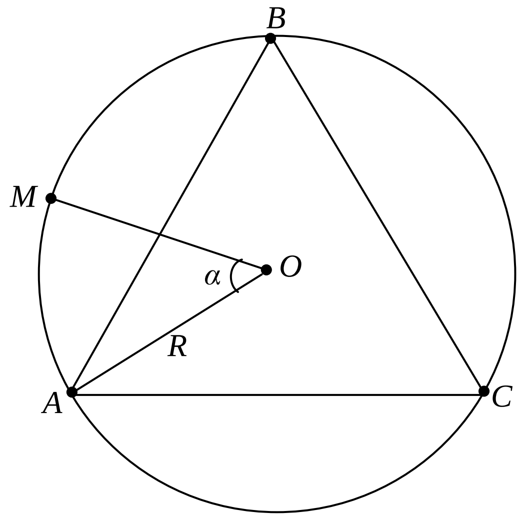
Ответ. $a > 3{,}5$.

Задание 6. (30 баллов) В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. На окружности выбрана точка M. Найти все возможные значения суммы $AM^2+BM^2+CM^2$.

Решение.

Проверяя некоторые частные случаи, можно убедиться, что данная сумма всегда равна $6R^2$. Докажем это.

Пусть для определенности точка M лежит на дуге AB окружности с центром в точке O радиуса R, описанной около равностороннего треугольника ABC.



Обозначим через α величину наименьшего из углов AOM и BOM.

Очевидно, что $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{3}$.

Тогда $\angle BOM = \dfrac{2\pi}{3} - \alpha$, $\angle COM = \dfrac{2\pi}{3} + \alpha$.

Применяя теорему косинусов к треугольникам AOM, BOM и COM, получаем

$AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2AO \cdot OM \cdot \cos\alpha = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$,

Аналогично, $BM^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right)$,

$$CM^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right).$$

Складывая полученные выражения, находим

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 6R^2 - 2R^2\left(\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right).$$

Сумма $\cos\alpha + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 0$, так как

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha = -\cos\alpha.$$

Значит, величина $AM^2 + BM^2 + CM^2$ постоянна и равна $6R^2$ независимо от положения точки M на окружности. Что и требовалось доказать.

Ответ. $6R^2$.

Задание 1. (5 баллов) Турист отправляется в поход из пункта A в пункт B и обратно. Проходит весь путь за 3 часа 41 минуту. Дорога из пункта A в пункт B идет сначала в гору, потом по ровному месту, затем под гору. Определить, на каком протяжении дорога проходит по ровному месту, если скорость туриста составляет при подъеме в гору 4 км/ч, на ровном месте – 5 км/ч, при спуске с горы – 6 км/ч, а расстояние AB равно 9 км.

Решение.
Пусть x км пути турист проходит по ровному месту, тогда $(9-x)$ км пути (в гору и под гору) турист проходит дважды, один раз (каждый из участков подъема или спуска) со скоростью 4 км/ч, другой со скоростью 6 км/ч и затратит на этот путь $\frac{9-x}{4}$ и $\frac{9-x}{6}$ часов.

Т.к. по ровному месту турист идет $\frac{2x}{5}$ часов, а путь в оба конца проходит за 3 часа 41 минуту, то

$$\frac{2x}{5}+\frac{9-x}{4}+\frac{9-x}{6}=3\frac{41}{60}.$$

$$\frac{24x}{60}+\frac{15(9-x)}{60}+\frac{10(9-x)}{60}=\frac{221}{60},$$

$$24x+135-15x+90-10x=221,$$

$$225-x=221,$$

$$x=4.$$

Ответ. 4.

Задание 2. (10 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right).$$

Решение.

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$$

Заметим, что выражение $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.

Следовательно,

$$A=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=4\cdot(3-4)\cdot\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=-6\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Ответ. $A=-6\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Задание 3. Доказать, что число $\dfrac{7^{2020^{2019}}-3^{20^{18}}}{10}$ целое.

Решение.

Последняя цифра числа 7^n зависит от показателя степени n и принимает значения 7, 9, 3, 1, причем, если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 7^n есть 1 (единица).

Число 3^n оканчивается на одну из цифр 3, 9, 7, 1, причем если показатель степени n делится на 4, то последняя цифра числа 3^n есть 1 (единица).

Т.к. 20 делится на 4, то и 2020 делится на 4, следовательно, 2020^{2019} делится на 4 и 20^{18} делится на 4. Значит число $\dfrac{7^{2020^{2019}}-3^{20^{18}}}{10}$ – целое, т.е. в числителе дроби уменьшаемое и вычитаемое оканчиваются той же цифрой 1, поэтому числитель делиться на 10.

Что требовалось доказать.

Задание 4. (20 баллов) Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей за сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

Решение.

Пусть x – количество машин, производимых в сутки первым заводом. Тогда второй завод до реконструкции производил в сутки $\dfrac{95x}{100}$ машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать $\dfrac{95x}{100}+\dfrac{23x}{100}$ машин. Из условий задачи следует система неравенств:

$$\begin{cases} x \le 950, \\ \dfrac{95x}{100}+\dfrac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Множество решений этой системы есть промежуток $847\dfrac{54}{118} < x \le 950$. Так как числа $\dfrac{95x}{100}$ и $\dfrac{23x}{100}$ должны быть целыми, то x должно делиться на 100 и быть из указанного промежутка, поэтому $x = 900$. Следовательно, первый завод выпускает в сутки 900 автомобилей, а второй завод до реконструкции выпускал $\dfrac{95}{100}\cdot 900 = 855$ автомобилей.

Ответ. 900 и 855.

Задание 5. (20 баллов) Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{4-|x|}{|x|-1}\right| = a$ имеет ровно 4 корня.

Решение.

Укажем возможные значения параметра и переменной:

$$\left|\frac{4-|x|}{|x|-1}\right| = a,\ |x| \neq 1,\ |x| > 0,\ a > 0. \qquad (*)$$

Используя свойство модуля, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 4-|x| = a|x| - a, \\ 4-|x| = -a|x| + a; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x|(1+a) = 4+a, \\ |x|(1-a) = 4-a; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} |x| = \dfrac{4+a}{1+a}, \\ |x| = \dfrac{4-a}{1-a}; \end{array}\right.$$

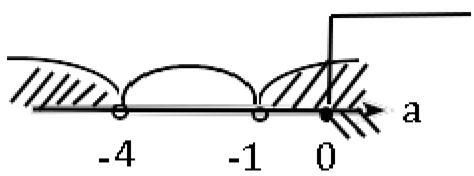
Т.о., получаем 4 решения системы:

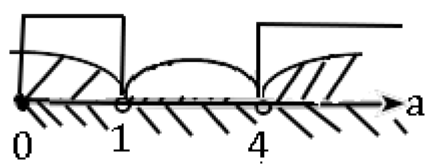
$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{4+a}{1+a}, \\ x = \pm\dfrac{4-a}{1-a}; \end{array}\right.$$

Проверим выполнение условия (*)

$$\begin{cases} a > 0, \\ \dfrac{4+a}{1+a} > 0, \\ \dfrac{4-a}{1-a} > 0; \end{cases}$$

Решая каждое неравенство методом интервалов, получаем





$$\begin{cases} a > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a > 4; \\ a < 1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a > -1, \\ a < -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Т.о., $a > 4$.

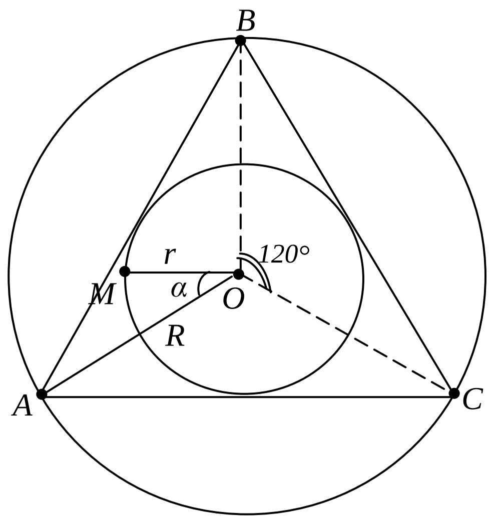
Ответ. $a > 4$.

Задание 6. (30 баллов) В равносторонний треугольник ABC вписана окружность радиуса r. На окружности выбрана точка M. Найти все возможные значения суммы $AM^2 + BM^2 + CM^2$.

Решение.

Проверяя некоторые частные случаи, можно убедиться, что данная сумма всегда равна $15r^2$. Докажем это.

Пусть для определенности точка M лежит на дуге окружности, ближайшей к вершине A, т.е. из отрезков AO, BO и CO (O – центр окружности) выберем тот, угол между которым и OM наименьший. Пусть это AO.



Обозначим через α величину угла между отрезком AO и OM, $|OM| = r$. Тогда, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$.

Тогда угол между OM и BO равен $\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$, угол между OM и CO равен $\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$.

Пусть R – радиус описанной вокруг данного треугольника окружности.

Применяя теорему косинусов к треугольникам AOM, BOM и COM, получаем

$AM^2 = AO^2 + OM^2 - 2AO \cdot OM \cdot \cos\alpha = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\alpha$,

Аналогично, $BM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$,

$$CM^2 = r^2 + R^2 - 2r \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right).$$

Складывая полученные выражения, находим

$$AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 - 2r \cdot R \cdot \left(\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)\right).$$

Сумма $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 0$, так как

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha = -\cos\alpha.$$

Значит, величина $AM^2 + BM^2 + CM^2$ постоянна и равна $3r^2 + 3R^2$. Учитывая, что $R = 2r$, $AM^2 + BM^2 + CM^2 = 3r^2 + 3R^2 = 3r^2 + 3(2r)^2 = 15r^2$. Т.о., величина $AM^2 + BM^2 + CM^2$ постоянна и равна $15r^2$ независимо от положения точки M на окружности. Что и требовалось доказать.

Ответ. $15r^2$.