Математика. 9 класс.
Вариант-41

Задание 1.. (5 баллов) Вычислить значение выражения A, если

$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Решение:

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(4-\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4-\left(2+\sqrt{3}\right)\right)}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=$$

$$=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

Ответ. $A=1$.

Задание 2(10 баллов) Найти угол между часовой и минутной стрелками, если часы показывают 7 часов 38 минут.

Решение.

Часовая стрелка проходит за час 30°, а за минуту – 0,5°. Значит, к данному моменту времени она прошла 7·30° + 38·0,5° = 229° от положения в полночь. Минутная стрелка проходит за минуту 6°, т.е. за 38 минут – 228°. Значит, искомый угол равен 1°.

Ответ. 1°.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{y}{x+1},\\ x^2+2y+1=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x\neq-1$, $y\neq-1$.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{y}{x+1},\\ x^2+2y+1=0.\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы $\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{y}{x+1}$.

Запишем его в виде $x(x+1)=y(y+1)$,

$x^2+x=y^2+y$,

$x^2-y^2+x-y=0$,

$(x-y)(x+y+1)=0$.

Откуда $x-y=0$, или $x+y+1=0$.

1) Если $x-y=0$, $x=y$, то при подстановке x во второе уравнение системы получаем уравнение $y^2+2y+1=0$, т.е. $y=-1$, что не удовлетворяет ОДЗ.

2) Если $x+y+1=0$, $x=-y-1$, то при подстановке x во второе уравнение системы получаем уравнение $(-y-1)^2+2y+1=0$.

$y^2+4y+2=0$,

$y_1=-2+\sqrt{2}$, $y_2=-2-\sqrt{2}$.

Тогда, если $y_1=-2+\sqrt{2}$, то $x_1=1-\sqrt{2}$; если $y_2=-2-\sqrt{2}$, то $x_2=1+\sqrt{2}$.

Ответ. $(1-\sqrt{2};\ -2+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};\ -2-\sqrt{2})$.

Задание 4. (20 баллов) Двое рабочих выполнили работу менее, чем за 4 часа. Если бы первый выполнял ее в одиночку, он сделал бы работу на 6 часов быстрее, чем один только второй рабочий. Определить, какие значения может принимать время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно.

Решение.

Обозначим: A - вся работа,

v_1 - производительность труда первого рабочего,

v_2 - производительность труда второго рабочего.

Учитывая условия, составим систему $\begin{cases} \dfrac{A}{v_1+v_2}<4, \\ \dfrac{A}{v_1}=\dfrac{A}{v_2}-6. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{A}{v_1+v_2}<4, \\ \dfrac{A}{v_1}=\dfrac{A}{v_2}-6; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A<4(v_1+v_2), \\ \dfrac{A}{v_1}=\dfrac{A}{v_2}-6; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_1}{A}+\dfrac{v_2}{A}>\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{A}{v_1}=\dfrac{A}{v_2}-6. \end{cases}$$

Пусть $\dfrac{A}{v_1}=x$, $\dfrac{A}{v_2}=y$. Тогда система примет вид $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{4}, \\ x=y-6; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{4}, \\ y=x+6. \end{cases}$.

Исключив переменную y из неравенства системы, получим неравенство $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+6}>\dfrac{1}{4}$.

После преобразований, получаем неравенство $x^2-2x-24<0$. Учитывая, что $x>0$, получаем $x\in(0;\ 6)$. Т.о., время выполнения работы только первым рабочим может принимать значения в интервале $(0;\ 6)$, т.е. менее 6 часов.

Ответ: менее 6 часов.

Задание 5. (20 баллов) Найти все значения m, при которых область определения функции $f(x)=\sqrt{2mx-x^2-5}+\sqrt{1-x}$ состоит из одной точки.

Решение.

Функция определена на множестве, являющемся решением системы

$$\begin{cases}2mx-x^2-5\ge 0,\\ 1-x\ge 0;\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-2mx+5\le 0,\\ x\le 1.\end{cases}$$

Чтобы эта система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы парабола $y=x^2-2mx+5$ либо имела один единственный корень, не превосходящий 1, либо имела два корня, меньший из которых был бы равен 1, т.е.

$\begin{cases}D=0,\\ x_в\le 1;\end{cases}$ или $\begin{cases}y(1)=0,\\ x_в>1;\end{cases}$, где $D=4m^2-20$, $x_в=m$ - абсцисса вершины параболы.

Тогда, $\begin{cases}4m^2-20=0,\\ m\le 1;\end{cases}$ или $\begin{cases}6-2m=0,\\ m>1.\end{cases}$

1) $\begin{cases}4m^2-20=0,\\ m\le 1;\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=-\sqrt{5},\\ m=\sqrt{5},\end{array}\right.\\ m\le 1,\end{cases}\rightarrow m=-\sqrt{5}$.

2) $\begin{cases}6-2m=0,\\ m>1,\end{cases}\rightarrow\begin{cases}m=3,\\ m>1,\end{cases}\rightarrow m=3$.

Ответ: $m=-\sqrt{5}$, $m=3$.

Задание 6. (30 баллов) Пусть $b_1,b_2,\dots,b_n$ – последовательные члены геометрической прогрессии, S_n – сумма ее n первых членов. Доказать, что

$$S_n=b_1b_n\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\dots+\frac{1}{b_n}\right).$$

Решение.

$$S_n=b_1+b_2+b_3+b_4+\dots+b_n=b_1+b_1q+b_1q^2+b_1q^3+\dots+b_1q^{n-1}=$$

$$b_1b_n\left(\frac{b_1}{b_1b_n}+\frac{b_1q}{b_1b_n}+\frac{b_1q^2}{b_1b_n}+\frac{b_1q^3}{b_1b_n}+\dots+\frac{b_1q^{n-1}}{b_1b_n}\right)=b_1b_n\left(\frac{1}{b_n}+\frac{q}{b_n}+\frac{q^2}{b_n}+\frac{q^3}{b_n}+\dots+\frac{q^{n-1}}{b_n}\right)=$$

$$=b_1b_n\left(\frac{1}{b_n}+\frac{q}{b_{n-1}q}+\frac{q^2}{b_{n-2}q^2}+\frac{q^3}{b_{n-3}q^3}+\dots+\frac{q^{n-1}}{b_1q^{n-1}}\right)=b_1b_n\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{b_{n-1}}+\frac{1}{b_{n-2}}+\frac{1}{b_{n-3}}+\dots+\frac{1}{b_1}\right)=$$

$$=b_1b_n\left(\frac{1}{b_1}+\dots+\frac{1}{b_{n-3}}+\frac{1}{b_{n-2}}+\frac{1}{b_{n-1}}+\frac{1}{b_n}\right)$$

Что и требовалось доказать.

Задание 1. (5 баллов) Вычислить значение выражения A, если

$$A=\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\cdot\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right).$$

Решение.

$$A=\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}+2\sqrt{26}+6\right)\cdot\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}-2\sqrt{26}-6\right)=\left(\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}\right)+\left(2\sqrt{26}+6\right)\right)\cdot\left(\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}\right)-\left(2\sqrt{26}+6\right)\right)=$$

$$=\left(4\sqrt{6}+\sqrt{39}\right)^2-\left(2\sqrt{26}+6\right)^2=\left(96+8\sqrt{6\cdot 39}+39\right)-\left(104+24\sqrt{26}+36\right)=135+24\sqrt{26}-140-24\sqrt{26}=-5$$

Ответ. $A=-5$.

Задание 2. (10 баллов) Найти угол между часовой и минутной стрелками, если часы показывают 8 часов 36 минут.

Решение.

Часовая стрелка проходит за час 30°, а за минуту – 0,5°. Значит, к данному моменту времени она прошла 8·30° + 36·0,5° = 258° от положения в полночь. Минутная стрелка проходит за минуту 6°, т.е. за 36 минут – 216°. Значит, искомый угол равен 42°.

Ответ. 42°.

Задание 3. (15 баллов) Решить систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{y+1}{x+2},\\ 2x^2-3xy-2y=0.\end{cases}$

Решение.

ОДЗ: $x\neq -2$, $y\neq -2$.

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{y+1}{x+2},\\ 2x^2-3xy-2y=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим y:

$2x^2-3xy-2y=0$,

$2x^2-y(3x+2)=0$,

$y=\dfrac{2x^2}{3x+2}$.

Преобразуем первое уравнение системы

$\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{y+1}{x+2}$,

$(x+1)(x+2)=(y+1)(y+2)$.

$$\begin{cases}(x+1)(x+2)=(y+1)(y+2),\\ y=\dfrac{2x^2}{3x+2}.\end{cases}$$

Решим первое уравнение системы, поставив $y=\dfrac{2x^2}{3x+2}$.

$$(x+1)(x+2)=\left(\frac{2x^2}{3x+2}+1\right)\left(\frac{2x^2}{3x+2}+2\right),$$

$$(x+1)(x+2)=\frac{2(2x^2+3x+2)(x+2)(x+1)}{(3x+2)^2},$$

$$(x+1)(x+2)\left(1-\frac{2(2x^2+3x+2)}{(3x+2)^2}\right)=0.$$

Получаем, что $x+1=0$, или $x+2=0$, или $1-\frac{2(2x^2+3x+2)}{(3x+2)^2}=0$.

1) Если $x+1=0$, $x=-1$, то $y=-2$ - не удовлетворяет ОДЗ.

2) Если $x+2=0$, то $x=-2$ - не удовлетворяет ОДЗ.

3) Если $1-\frac{2(2x^2+3x+2)}{(3x+2)^2}=0$, то

$$\begin{cases}(9x^2+12x+4)-(4x^2+6x+4)=0,\\ x\neq-\frac{2}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}5x^2+6x=0,\\ x\neq-\frac{2}{3};\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-\frac{6}{5}.\end{array}\right.$$

Тогда, если $x=0$, то $y=0$; если $x=-\frac{6}{5}$, то $y=-\frac{9}{5}$.

Ответ. $(0;0)$, $\left(-\frac{6}{5};-\frac{9}{5}\right)$**.**

Задание 4. (20 баллов) Две машинистки, работая одновременно, могут перепечатать рукопись не менее, чем за 2 часа. Если же будет работать только первая машинистка, то ей потребуется на перепечатку рукописи на 3 часа меньше, чем работающей в одиночку второй машинистке. Определить, какие значения может принимать время перепечатки рукописи второй машинисткой, работающей отдельно.

Решение.

Обозначим: A - вся работа,

v_1 - производительность труда первой машинистки,

v_2 - производительность труда второй машинистки.

Учитывая условия, составим систему $\begin{cases}\frac{A}{v_1+v_2}\geq 2,\\ \frac{A}{v_1}=\frac{A}{v_2}-3.\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{A}{v_1+v_2}\geq 2,\\ \frac{A}{v_1}=\frac{A}{v_2}-3;\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A\geq 2(v_1+v_2),\\ \frac{A}{v_1}=\frac{A}{v_2}-3;\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{v_1}{A}+\frac{v_2}{A}\leq\frac{1}{2},\\ \frac{A}{v_1}=\frac{A}{v_2}-3.\end{cases}$$

Пусть $\frac{A}{v_1}=x$, $\frac{A}{v_2}=y$. Тогда система примет вид $\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{2},\\ x=y-3.\end{cases}$

Исключив переменную x из неравенства системы, получим неравенство $\frac{1}{y-3}+\frac{1}{y}\leq\frac{1}{2}$.

После преобразований, получаем неравенство $y^2-7y+6\geq 0$. Учитывая, что $y>3$, получаем $y\in[6;+\infty)$. Т.о., время выполнения работы только второй машинисткой может принимать значения в интервале $[6;+\infty)$, т.е. не менее 6 часов.

Ответ: не менее 6 часов.

Задание 5. (20 баллов) Найти все значения n, при которых область определения функции $f(x)=\sqrt{x-7}-\sqrt{n-4x-x^2}$ состоит из одной точки.

Решение.
Функция определена на множестве, являющемся решением системы

$$\begin{cases} n-4x-x^2\geq 0, \\ x-7\geq 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+4x-n\leq 0, \\ x\geq 7. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы парабола $y=x^2+4x-n$ либо имела один единственный корень, не меньший 7, либо имела два корня, больший из которых был бы равен 7:

$\begin{cases} D=0, \\ x_в\geq 7; \end{cases}$ или $\begin{cases} y(7)=0, \\ x_в<7; \end{cases}$, где $D=16+4n$, $x_в$ - абсцисса вершины параболы.

Так как $x_в=-2$, то рассматриваем только случай $\begin{cases} y(7)=0, \\ x_в<7. \end{cases}$

$y(7)=0$, $7^2+4\cdot 7-n=0$, $n=77$.

Ответ. $n=77$.

Задание 6. (30 баллов **)** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Решение.
Если разность прогрессии d отлична от 0, то можно записать

$$\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right),$$

$$\frac{1}{a_2a_3}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right),$$

$\ldots$

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Сложив эти равенства, получим

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{d}\cdot\frac{(a_1+d\cdot n)-a_1}{a_1\cdot a_{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\frac{d\cdot n}{a_1\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$$

Что и требовалось доказать.