Задача 1. (5 баллов) Сравнить числа A и B, если $A=\sqrt[1000]{\frac{2017}{2018}}$ и $B=\sqrt[1000]{\frac{2018}{2019}}$.

Решение.

Представим подкоренные выражения в виде: $\frac{2017}{2018}=1-\frac{1}{2018}$, $\frac{2018}{2019}=1-\frac{1}{2019}$.

Заметим, что $\frac{1}{2018}>\frac{1}{2019}$, а значит $\frac{2017}{2018}<\frac{2018}{2019}$, следовательно $\sqrt[1000]{\frac{2017}{2018}}<\sqrt[1000]{\frac{2018}{2019}}$.

Ответ. $\sqrt[1000]{\frac{2017}{2018}}<\sqrt[1000]{\frac{2018}{2019}}$.

Задача 2. (10 баллов) Найти значение выражения A, если $A=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right)$.

Решение.

Заметим, что выражение $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Проверим: $\frac{1}{2-\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}:\frac{1}{2-\sqrt{2}}$.

$$\frac{1}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{1},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2},$$

$$\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}.$$

Т.о., выражение $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$ - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$.

Тогда $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots=\frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(2-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^2=\sqrt{2}\left(2+2\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{2}\left(3+\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+4$.

Следовательно, $A=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\right)=\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-4^2=18-16=2$.

Ответ. 2.

Задача 3. (15 баллов) Найти наибольшее значение функции f (x), если $f\left(\frac{2-3x}{x+1}\right)=\frac{11x^2+22x-14}{(x+1)^2}$.

Решение.

Обозначим $\frac{2-3x}{x+1}=t$. Тогда $x=\frac{2-t}{3+t}$.

Преобразуем функцию

$$f\left(\frac{2-3x}{x+1}\right)=\frac{11x^2+22x-14}{(x+1)^2}=\frac{11\left(\frac{2-t}{3+t}\right)^2+22\left(\frac{2-t}{3+t}\right)-14}{\left(\frac{2-t}{3+t}+1\right)^2}=\frac{11(2-t)^2+22(2-t)(3+t)-14(3+t)^2}{(2-t+3+t)^2}=$$

$$=\frac{1}{25}\left(44-44t+11t^2+132-22t-22t^2-126-84t-14t^2\right)=\frac{1}{25}\left(-25t^2-150t+50\right)=-t^2-6t+2=f(t).$$

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Она имеет наибольшее значение при условии $f'(t)=0$. $f'(t)=-2t-6=0, t=-3$.

Тогда $f_{наиб.}\left(\frac{2-3x}{x+1}\right)=f_{наиб.}(t)=-(-3)^2-6(-3)+2=11$

Ответ: 11.

Задача 4. (20 баллов) Для функции $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$ найти производную 2018-го порядка ($y^{(2018)}$).

Решение.

Преобразуем функцию: $y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.

$$y'=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{(x-2)^2}+\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right),$$

$$y''=\frac{2}{(x-2)^3}+\frac{2}{(x-1)^3}=\frac{-1\cdot(-2)}{(x-2)^3}+\frac{-1\cdot(-2)}{(x-1)^3},$$

$$y'''=-\frac{6}{(x-2)^4}-\frac{6}{(x-1)^4}=\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x-2)^4}+\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x-1)^4}$$

…

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^n}+\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^n}.$$

Тогда, $y^{(2018)}=\frac{(-1)^{2018}2018!}{(x-2)^{2018}}+\frac{(-1)^{2018}2018!}{(x-1)^{2018}}=\frac{2018!}{(x-2)^{2018}}+\frac{2018!}{(x-1)^{2018}}$.

Ответ. $y^{(2018)}=\frac{2018!}{(x-2)^{2018}}+\frac{2018!}{(x-1)^{2018}}$.

Задача 5 (20 баллов) В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение.

Пусть x – число деталей в первом ящике, а y – число деталей во втором ящике.

Тогда из условия задачи имеет место система неравенств: $\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x-2y<60. \end{cases}$

Перепишем эту систему в виде $\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x. \end{cases}$

Отсюда следует, что справедлива система неравенств $\begin{cases} 20+\frac{2}{3}y>29-y, \\ 20+\frac{2}{3}y>3y+2. \end{cases}$

Значит, $\frac{27}{5}<y<\frac{54}{7}$, $5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}$.

Так как y – натуральное число, то у может быть равно или 6, или 7.

Если $y=6$, то система $\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} x>23, \\ x>20, \\ x<24. \end{cases}$

Очевидно, что нет таких натуральных чисел x, удовлетворяющих ей.

Если $y=7$, тогда система $\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x \end{cases}$ перепишется в виде $\begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x<24\frac{2}{3}. \end{cases}$

Существует единственное натуральное число $x=24$, удовлетворяющее этой системе.

Следовательно, в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

Ответ: 24 детали в первом ящике,
7 деталей во втором ящике.

Задача 6. (30 баллов) Решить систему уравнений для всех <u>положительных</u> значений x, y, z

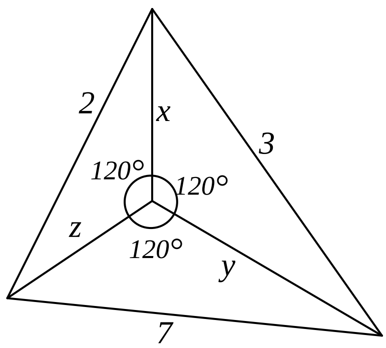
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9, \\ x^2+xz+z^2=4, \\ y^2+yz+z^2=49. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2=9, \\ x^2+xz+z^2=4, \\ y^2+yz+z^2=49 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x^2+y^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xy=3^2, \\ x^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xz=2^2, \\ y^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)yz=7^2. \end{cases}$

Т.к. $-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$, то систему перепишем $\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=3^2, \\ x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ=2^2, \\ y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=7^2. \end{cases}$

Уравнения получившейся системы можно интерпретировать как теоремы косинусов для треугольников с углом в 120° и сторонами x и y, x и z, y и z, т.е.
первое уравнение – треугольник со сторонами x,y, 3;
второе уравнение – треугольник со сторонами x,z, 2;
третье уравнение – треугольник со сторонами y,z, 7.



Если существуют положительные решения x, y и z, то составится и объемлющий треугольник со сторонами 3,2,7. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система не имеет решение.

Ответ: в положительных числах система не имеет решений.

Задача 1. Сравнить числа A и B, если $A=\sqrt[2000]{\frac{2018}{2019}}$ и $B=\sqrt[2000]{\frac{2019}{2020}}$.

Решение.

Представим подкоренные выражения в виде: $\frac{2018}{2019}=1-\frac{1}{2019}$, $\frac{2019}{2020}=1-\frac{1}{2020}$.

Заметим, что $\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}$, а значит $\frac{2018}{2019}<\frac{2019}{2020}$, следовательно, $\sqrt[2000]{\frac{2018}{2019}}<\sqrt[2000]{\frac{2019}{2020}}$.

Ответ. $\sqrt[2000]{\frac{2018}{2019}}<\sqrt[2000]{\frac{2019}{2020}}$.

Задача 2. (10 баллов) Найти значение выражения A, если

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right).$$

Решение.

$$A=\left(4\sqrt{3}+8\right)\left(\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)$$

Заметим, что выражение $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Тогда $\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{3}{\sqrt{3}-1}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$.

Следовательно,

$$A=4\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots\right)=4\cdot(3-4)\cdot\frac{3\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=-6\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Ответ. $A=-6\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Задание 3. (15 баллов) Найти наибольшее значение функции $f(x)$, если

$$f\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)=3\cdot\frac{3-4x-4x^2}{(x+1)^2}.$$

Решение.

Обозначим $\frac{1-2x}{x+1}=t$. Тогда $x=\frac{1-t}{2+t}$.

Преобразуем функцию

$$f\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)=3\cdot\frac{3-4x-4x^2}{(x+1)^2}=3\cdot\frac{3-4\left(\frac{1-t}{2+t}\right)-4\left(\frac{1-t}{2+t}\right)^2}{\left(\frac{1-t}{2+t}+1\right)^2}=3\cdot\frac{3(2+t)^2-4(1-t)(2+t)-4(1-t)^2}{(1-t+2+t)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{3\left(4+4t+t^2\right)-4\left(2-2t+t-t^2\right)-4\left(1-2t+t^2\right)}{9}=\frac{1}{3}\left(3t^2+24t\right)=t^2+8t=f(t)$$

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Она имеет наименьшее значение при условии $f'(t)=0$. $f'(t)=2t+8=0, t=-4$.

Тогда $f_{наим.}\left(\frac{1-2x}{x+1}\right)=f_{наим.}(t)=(-4)^2+8(-4)=-16$

Ответ: -16.

Задача 4. (20 баллов) Для функции $y=\frac{2x}{x^2-1}$ найти производную 2019-го порядка ($y^{(2019)}$).

Решение.

Преобразуем функцию: $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-1)+(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$.

$$y'=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{1}{(x+1)^2}+\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right),$$

$$y''=\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{2}{(x-1)^3}=\frac{-1\cdot(-2)}{(x+1)^3}+\frac{-1\cdot(-2)}{(x-1)^3},$$

$$y'''=-\frac{6}{(x+1)^4}-\frac{6}{(x-1)^4}=\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x+1)^4}+\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x-1)^4}$$

…

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^n}+\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^n}.$$

Тогда, $y^{(2019)}=\frac{(-1)^{2019}2019!}{(x+1)^{2019}}+\frac{(-1)^{2019}2019!}{(x-1)^{2019}}=-\frac{2019!}{(x+1)^{2019}}-\frac{2019!}{(x-1)^{2019}}$.

Ответ. $y^{(2019)}=-\frac{2019!}{(x+1)^{2019}}-\frac{2019!}{(x-1)^{2019}}$.

Задача 5 (20 баллов) В двух ящиках находится более 26 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 3, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике менее чем на 55. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение.

Пусть x – число деталей в первом ящике, а y – число деталей во втором ящике. Тогда из условия задачи имеет место система неравенств: $\begin{cases} x+y>26, \\ x-3>3y, \\ 3x-2y<55. \end{cases}$

Перепишем эту систему в виде $\begin{cases} x>26-y, \\ x>3y+3, \\ \dfrac{55+2y}{3}>x. \end{cases}$

Отсюда следует, что справедливы неравенства: $\dfrac{55+2y}{3}>26-y$ и $\dfrac{55+2y}{3}>3y+3$.

Значит $\dfrac{23}{5}<y<\dfrac{46}{7}$, или.

Так как y – натуральное число, то y может быть равно или 5, или 6. Если y=5, то система (2) имеет вид $\begin{cases} x>21, \\ x>18, \\ x<21\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

Ясно, что нет натуральных чисел, удовлетворяющих ей.

Если y=6, тогда система (2) перепишется в виде $\begin{cases} x>20, \\ x>21, \\ x<22\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Существует единственное натуральное число $x=22$, удовлетворяющее этой системе.

Следовательно, в первом ящике 22 детали, а во втором ящике 6 деталей.

Ответ: 22 детали в первом ящике,
6 деталей во втором ящике.

Задача 6. (30 баллов) Решить систему уравнений для всех <u>положительных</u> значений x, y, z

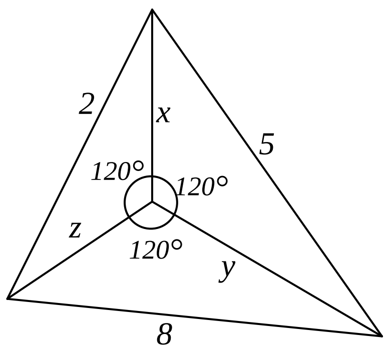
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=25, \\ x^2+xz+z^2=4, \\ y^2+yz+z^2=64. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему $\begin{cases} x^2+xy+y^2=25, \\ x^2+xz+z^2=4, \\ y^2+yz+z^2=64 \end{cases}$ в виде $\begin{cases} x^2+y^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xy=5^2, \\ x^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)xz=2^2, \\ y^2+z^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)yz=8^2. \end{cases}$

Т.к. $-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$, то систему перепишем $\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=5^2, \\ x^2+z^2-2xz\cos 120^\circ=2^2, \\ y^2+z^2-2yz\cos 120^\circ=8^2. \end{cases}$

Уравнения получившейся системы можно интерпретировать как теоремы косинусов для треугольников с углом в 120° и сторонами x и y, x и z, y и z, т.е.
первое уравнение – треугольник со сторонами x,y, 5;
второе уравнение – треугольник со сторонами x,z, 2;
третье уравнение – треугольник со сторонами y,z, 8.



Если существуют положительные решения x, y и z, то составится и объемлющий треугольник со сторонами 3,2,7. Такого треугольника не существует. Следовательно, в положительных числах система не имеет решение.

Ответ: в положительных числах система не имеет решений.