Математика. Вариант-31

Задание 1. (5 баллов) Найти сумму всех цифр, используемых при записи натуральных чисел от 1 до 1 000 000 000.

Задание 2. (10 баллов) Решить уравнение $f(f(x))=0$, если $f(x)=x^2+2020x$.

Задание 3. (15 баллов) В квадрат со стороной 1 вписана окружность, в эту окружность вписан квадрат, в квадрат снова вписана окружность и т.д. Найти сумму площадей всех квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\dfrac{2020}{n}$, для $n=1,2,\ldots$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, вложить в первый квадрат без наложений?

Задание 5. (20 баллов) В ящике размещены 2020 пробирок с пробами нефтепродуктов из скважин А и Б. Может ли проб из скважины А быть столько, чтобы вероятность взять наудачу две пробирки с пробами из одной скважины была равна 0,5?

Задание 6. (30 баллов) Три насоса разной производительности наполняли танкер нефтью. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за 5 часов. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за $3\frac{3}{4}$ часа. За сколько часов танкер наполнен в действительности?

Задание 1. (5 баллов) Найти сумму всех цифр, используемых при записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000 000.

Решение.

Если добавить 0 (нуль), то можно образовать 500 000 000 пар чисел:

$(0;999999999)$, $(1;999999998)$, $(2;999999997)$, …, $(499999998;50000001)$, $(499999999;50000000)$.

Сумма цифр в каждой паре будет равна $9\cdot 9=81$.

Если добавить 1 в сумму цифр для неучтенного при этом число 1 000 000 000, то получим всю сумму цифр: $500000000\cdot 81+1=40500000001$.

Ответ. 40 500 000 001.

Задание 2. (10 баллов) Решить уравнение $f(f(x))=0$, если $f(x)=x^2+2020x$.

Решение.

Пусть $f(x)=y$. Тогда имеем уравнение $f(y)=0$, т.е. $y^2+2020y=0$, $y_1=0$, $y_2=-2020$.

Решим два полученных уравнения: $f(x)=0$ или $f(x)=-2000$.

Получим, $x^2+2020x=0$ или $x^2+2020x=-2020$.

1) $x^2+2020x=0$, $x_1=-2020$, $x_2=0$.

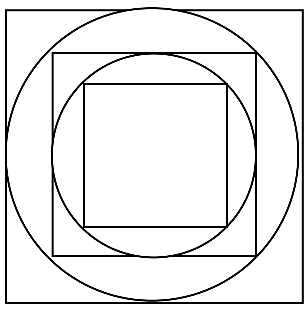
2) $x^2+2020x=-2020$, $x^2+2020x+2020=0$, $D=2020^2-4\cdot 2020=\left(24\sqrt{7070}\right)^2$,

$x_{3,4}=-1010\pm 12\sqrt{7070}$.

Ответ. $x_1=-2020$, $x_2=0$, $x_{3,4}=-1010\pm 12\sqrt{7070}$.

Задание 3. (15 баллов) В квадрат со стороной 1 вписана окружность, в эту окружность вписан квадрат, в квадрат снова вписана окружность и т.д. Найти сумму площадей всех квадратов.

Решение.



Длина стороны первого квадрата равна 1, его площадь равна 1.

Длина стороны второго квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (т. Пифагора), его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Длина стороны третьего квадрата равна $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}$.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, его площадь равна $\frac{1}{8}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{4}$, его площадь равна $\frac{1}{16}$. И т. д.

Получим последовательность: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$, т.е. $|q|<1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=1,\ q=\frac{1}{2}$, то $S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.

Ответ: 2.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2020}{n}$, для $n=1,2,...$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, уложить в первый квадрат без наложений?

Решение.

Разделим квадраты на группы так, чтобы количество квадратов в группе было ровно 2 в степени номера группы: $\left(\frac{2020}{2};\frac{2020}{3}\right)$, $\left(\frac{2020}{4};\frac{2020}{5};\frac{2020}{6};\frac{2020}{7}\right)$, … .

Сумма длин сторон квадратов в n-ой группе равна

$$2020\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+...+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<2020\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^n\ \text{раз}}=2020\cdot 1=2020.$$

Квадраты n-ой группы помещаются рядом в прямоугольник с высотой $\frac{2020}{2^n}$ и шириной 2020. Помещая эти прямоугольники, содержащие группы квадратов, один на другой, получим прямоугольник шириной 2020 и высотой, равной сумме высот прямоугольников:

$$2020\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)=2020,$$

т.е. в первый квадрат поместились без наложения все квадраты, начиная со второго.

Ответ. Да, можно.

Задание 5. (20 баллов) В ящике 2020 пробирок с пробами нефтепродуктов со скважин А и Б. Может ли проб со скважины А быть столько, чтобы вероятность взять наудачу две пробирки с пробами с одной скважины была равна 0,5?

Решение.

Пусть в ящике $n+m$ пробирок, из которых n с пробами скважины А и m – скважины Б. тогда вероятность взять две пробирки с пробами с одной скважины равна сумме вероятностей $p(AA)+p(ББ)$: взять две пробирки с пробами со скважины А или взять две пробирки с пробами со скважины Б.

$$p(AA)=\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1};\ p(ББ)=\frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1}.$$

$$p(AA)+p(ББ)=\frac{n}{n+m}\cdot\frac{n-1}{n+m-1}+\frac{m}{n+m}\cdot\frac{m-1}{n+m-1}=\frac{n^2-n+m^2-m}{(n+m)(n+m-1)}=\frac{1}{2}.$$

Откуда $2n^2-2n+2m^2-2m=(n+m)(n+m-1)$,

$$2n^2-2n+2m^2-2m=n^2+2nm+m^2-n-m,$$

$$n^2-2nm+m^2=n+m,$$

$$(n-m)^2=n+m.$$

Т.к. по условию задачи в ящике 2020 пробирок с пробами, т.е. $n+m=2020$, то $(n-m)^2=2020$. Данное уравнение целых решений не имеет.

Ответ. Не может.

Задание 6. (30 баллов) Три насоса разной производительности наполняли танкер нефтью. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за 5 часов. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за $3\frac{3}{4}$ часа. За сколько часов танкер наполнен в действительности?

Решение.

Обозначим объем танкера V (а некоторых единицах), а производительности первого, второго и третьего насосов через x, y, z, соответственно.

Составим по условиям задачи два уравнения:

$$5(2x + y + 3z) = V,$$

$$3\frac{3}{4}(3x + 2y + 4z) = V.$$

Пусть t – число часов, за которое в действительности наполнен танкер. Получим третье уравнение:

$$t(x + y + z) = V.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = \dfrac{V}{5}, \\ 3x + 2y + 4z = \dfrac{4V}{15}, \\ x + y + z = \dfrac{V}{t}. \end{cases}$$

Если найдем такие числа α и β, для которых

$$\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z,$$

то будет справедливо равенство:

$$\alpha\frac{V}{5} + \beta\frac{4V}{15} = \frac{V}{t}.$$

Для нахождения чисел α и β сравним в уравнении $\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z$ коэффициенты при одинаковых неизвестных. Получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1, \\ \alpha + 2\beta = 1, \\ 3\alpha + 4\beta = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Следовательно, решая уравнение $\frac{4V}{15} - \frac{V}{5} = \frac{V}{t}$, получим $t = 15$.

Ответ. 15 часов.