Математика. Вариант-42

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<2$.

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 4 скважины, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,2. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2021}{n}$, для $n=1,2,\ldots$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, вложить в первый квадрат без наложений?

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

Задание 6. (30 баллов) Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован вырыт в действительности?

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<2$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<1$.

Справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2019\cdot 2020}.$$

Так как

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2019\cdot 2020}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020},$$ то

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<\frac{2019}{2020}<1.$$

Что требовалось доказать.

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 4 скважины, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,2. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлите до сотых.

Решение:

Пусть вероятность исправной работы скважины равна p, а вероятность выхода из строя – q.

По условию задачи необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины, то есть исправно работают или 2, или 3, или 4 скважин.

Найдем вероятность исправной работы любых 2-х скважин – $p\cdot p\cdot q\cdot q$ (работают первая, вторая скважины, не работают третья и четвертая скважины) или $p\cdot q\cdot q\cdot p$ (работают первая, четвертая скважины, не работают – вторая и третья) или т.д. Всего таких комбинаций 6. Следовательно, вероятность работы любых трех скважин равна $6p^2q^2$.

Аналогично находим, что вероятность исправной работы 3-х скважин равна $4p^3q$.

Вероятность исправной работы 4-х скважин равна p^4.

Тогда вероятность исправной работы по крайней мере 3-х скважин равна

$$P=6p^2q^2+4p^3q+p^4.$$

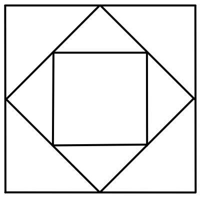
По условию задачи известно, что вероятность выхода из строя скважины равна $q=0{,}2$, тогда вероятность исправной работы скважины равна $p=1-0{,}2=0{,}8$.

Получим $P=6\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2+4\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2+0{,}8^4=0{,}9728\approx 0{,}97$.

Ответ. $0{,}97$.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Решение.



Длина стороны первого квадрата равна 1, его периметр равен 4.

Длина стороны второго квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (по т. Пифагора), его периметр равен $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Длина стороны третьего квадрата равна $\frac{1}{2}$, его периметр равен $\frac{4}{2}$.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, его периметр равен $\frac{4}{2\sqrt{2}}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{4}$, его периметр равен $\frac{4}{4}$. И т.д.

Получим последовательность: 4, $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{4}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $|q|<1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=4,\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S=\dfrac{4}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Ответ. $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2021}{n}$, для $n=1,2,...$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, уложить в первый квадрат без наложений?

Решение.

Разделим квадраты на группы так, чтобы количество квадратов в группе было ровно 2 в степени номера группы: $\left(\frac{2021}{2};\frac{2021}{3}\right)$, $\left(\frac{2021}{4};\frac{2021}{5};\frac{2021}{6};\frac{2021}{7}\right)$, … .

Сумма длин сторон квадратов в n-ой группе равна

$$2021\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+...+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<2021\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^n\ \text{раз}}=2021\cdot 1=2021.$$

Квадраты n-ой группы помещаются рядом в прямоугольник с высотой $\frac{2021}{2^n}$ и шириной 2021. Помещая эти прямоугольники, содержащие группы квадратов, один на другой, получим прямоугольник шириной 2021 и высотой, равной сумме высот прямоугольников:

$$2021\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)=2021,$$

т.е. в первый квадрат поместились без наложения все квадраты, начиная со второго.

Ответ. Да, можно.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\frac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\frac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

Решение.

При ограничении $x\neq 4$ и $x\neq 0{,}5$ умножаем обе части на положительную величину $\frac{|x+4|}{|x-2|+|x+1|}$.

Получим равносильное неравенство $\frac{|(x-5)(x+4)|-(x+4)^2}{(x-2)^2-(x+1)^2}<1$.

Выполним преобразования:

$$\frac{|x^2-x-20|-x^2-8x-16}{-6x+3}-1<0,$$

$$\frac{|x^2-x-20|-x^2-8x-16+6x-3}{-3(2x-1)}<0,$$

$$\frac{|x^2-x-20|-x^2-2x-19}{2x-1}>0.$$

1) Пусть $x^2-x-20\geq 0$, тогда $x\in(-\infty;-4)\cup[5;+\infty)$.

Неравенство примет вид

$\frac{x^2-x-20-x^2-2x-19}{2x-1}>0$, $\frac{x+13}{2x-1}<0$, $-13<x<\frac{1}{2}$, т.е. $x\in(-13;0{,}5)$

Учитывая, что $x\in(-\infty;-4)\cup[5;+\infty)$, получим $x\in(-13;-4)$.

2) Пусть $x^2-x-20<0$, тогда $x\in(-4;5)$.

Неравенство примет вид

$\frac{-x^2+x+20-x^2-2x-19}{2x-1}>0$, $\frac{-2x^2-x+1}{2x-1}>0$, $\frac{(x+1)(2x-1)}{2x-1}<0$, $x<-1$, т.е. $x\in(-\infty;-1)$.

Учитывая, что $x\in(-4;5)$, получим $x\in(-4;-1)$.

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x\in(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

Ответ. $(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

Задание 6. (30 баллов) Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован вырыт в действительности?

Решение.

Обозначим объем котлована V (а некоторых единицах), а производительности первого, второго и третьего экскаваторов через x, y, z, соответственно.

Составим по условиям задачи два уравнения:

$$5(2x+y+3z)=V,$$

$$3\frac{3}{4}(3x+2y+4z)=V.$$

Пусть t – число дней, за которое в действительности вырыт котлован. Получим третье уравнение:

$$t(x+y+z)=V.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = \dfrac{V}{5}, \\ 3x + 2y + 4z = \dfrac{4V}{15}, \\ x + y + z = \dfrac{V}{t}. \end{cases}$$

Если найдем такие числа α и β, для которых

$$\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z,$$

то будет справедливо равенство:

$$\alpha\frac{V}{5} + \beta\frac{4V}{15} = \frac{V}{t}.$$

Для нахождения чисел α и β, сравним в уравнении $\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z$ коэффициенты при одинаковых неизвестных. Получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1, \\ \alpha + 2\beta = 1, \\ 3\alpha + 4\beta = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha = -1,\ \beta = 1$.

Следовательно, решая уравнение $\dfrac{4V}{15} - \dfrac{V}{5} = \dfrac{V}{t}$, получим $t = 15$.

Ответ. 15 дней.