**Математика. Вариант-41**

**Задание 1.** (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<2$.

**Задание 2.** (10 баллов) Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

**Задание 3.** (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

**Задание 4**. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2020}{n}$, для $n=1,2,\ldots$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, вложить в первый квадрат без наложений?

**Задание 5.** (20 баллов) Решить неравенство $\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

**Задание 6.** (30 баллов) Три насоса разной производительности наполняли танкер нефтью. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за 5 часов. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за $3\frac{3}{4}$ часа. За сколько часов танкер наполнен в действительности?

**Задание 1.** (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<2$.

**Решение**. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<1$.

Справедливо неравенство

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2020\cdot 2021}.$$

Т.к. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2020\cdot 2021}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}\right)=1-\frac{1}{2021}=\frac{2020}{2021}$,

то $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<\frac{2020}{2021}<1$.

**Что требовалось доказать.**

**Задание 2.** (10 баллов) Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлите до сотых.

**Решение.**

Пусть вероятность исправной работы скважины равна $p$, а вероятность выхода из строя – $q$.

По условию задачи необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины, то есть исправно работают или 3, или 4, или 5 скважин.

Найдем вероятность исправной работы любых 3-х скважин – $p\cdot p\cdot p\cdot q\cdot q$ (работают первая, вторая и третья скважины, не работают четвертая и пятая скважины) или $p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot q$ (работают первая, вторая и четвертая скважины, не работают – третья и пятая) или т.д. Всего таких комбинаций 10. Следовательно, вероятность работы любых трех скважин равна $10p^3q^2$.

Аналогично находим, что вероятность исправной работы 4-х скважин равна $5p^4q$.

Вероятность исправной работы 5-ти скважин равна $p^5$.

Тогда вероятность исправной работы по крайней мере 3-х скважин равна

$$P=10p^3q^2+5p^4q+p^5.$$

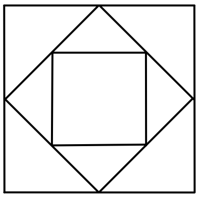
По условию известно, что вероятность выхода из строя скважины равна $q=0{,}1$, тогда вероятность исправной работы скважины равна $p=1-0{,}1=0{,}9$.

Получим $P=10\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^2+5\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1+0{,}9^5=0{,}99144\approx 0{,}99$.

**Ответ.** $0{,}99$.

**Задание 3.** (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

**Решение.**



Длина стороны первого квадрата равна 2, его периметр равен 8.

Длина стороны второго квадрата равна $\sqrt{2}$ (по т. Пифагора), его периметр равен $4\sqrt{2}$.

Длина стороны третьего квадрата равна 1, его периметр равен $4$.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, его периметр равен $\frac{4\sqrt{2}}{2}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{2}$, его периметр равен $\frac{4}{2}$. И т.д.

Получим последовательность: 8, $4\sqrt{2}$, 4, $\frac{4\sqrt{2}}{2}$, $\frac{4}{2}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $|q|<1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=8,\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S=\dfrac{8}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

**Ответ.** $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

**Задание 4**. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2020}{n}$, для $n=1,2,...$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, уложить в первый квадрат без наложений?

**Решение.**

Разделим квадраты на группы так, чтобы количество квадратов в группе было ровно 2 в степени номера группы: $\left(\frac{2020}{2};\frac{2020}{3}\right)$, $\left(\frac{2020}{4};\frac{2020}{5};\frac{2020}{6};\frac{2020}{7}\right)$, … .

Сумма длин сторон квадратов в $n$-ой группе равна

$$2020\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+...+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)<2020\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+...+\frac{1}{2^n}\right)}_{2^n\text{ раз}}=2020\cdot 1=2020.$$

Квадраты $n$-ой группы помещаются рядом в прямоугольник с высотой $\frac{2020}{2^n}$ и шириной 2020. Помещая эти прямоугольники, содержащие группы квадратов, один на другой, получим прямоугольник шириной 2020 и высотой, равной сумме высот прямоугольников:

$$2020\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^n}+...\right)=2020,$$

т.е. в первый квадрат поместились без наложения все квадраты, начиная со второго.

**Ответ.** Да, можно.

**Задание 5.** (20 баллов) Решить неравенство $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

**Решение.**

$$\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$$

При ограничениях $x\neq 4$ и $x\neq 2{,}5$ умножим обе части неравенства на положительную величину $\dfrac{|x-4|}{|x-3|+|x-2|}$.

Получим равносильное неравенство $\dfrac{(x-4)^2-|(x-1)(x-4)|}{(x-3)^2-(x-2)^2}<1$.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2-8x+16-|x^2-5x+4|}{-2x+5}-1<0,$$

$$\frac{x^2-8x+16-|x^2-5x+4|+2x-5}{-2x+5}<0,$$

$$\frac{x^2-6x+11-|x^2-5x+4|}{2x-5}>0.$$

1) Пусть $x^2-5x+4\geq 0$, тогда $x\in(-\infty;1]\cup(4;+\infty)$**.**

Неравенство примет вид

$\dfrac{x^2-6x+11-x^2+5x-4}{2x-5}>0$, $\dfrac{-x+7}{2x-5}>0$, $2{,}5<x<7$, т.е. $x\in(2{,}5;7)$.

Учитывая, что $x\in(-\infty;1]\cup(4;+\infty)$, получим $x\in(4;7)$.

2) Пусть $x^2-5x+4<0$, тогда $x\in(1;4)$.

Неравенство примет вид

$\dfrac{x^2-6x+11+x^2-5x+4}{2x-5}>0$, $\dfrac{2x^2-11x+15}{2x-5}>0$, $\dfrac{(x-3)(2x-5)}{2x-5}>0$, $x>3$, т.е. $x\in(3;+\infty)$.

Учитывая, что $x\in(1;4)$, получим $x\in(3;4)$.

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x\in(3;4)\cup(4;7)$.

**Ответ.** $(3;4)\cup(4;7)$.

**Задание 6.** (30 баллов) Три насоса разной производительности наполняли танкер нефтью. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за 5 часов. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то танкер был бы наполнен за $3\dfrac{3}{4}$ часа. За сколько часов танкер наполнен в действительности?

**Решение.**

Обозначим объем танкера $V$ (а некоторых единицах), а производительности первого, второго и третьего насосов через $x$, $y$, $z$, соответственно.

Составим по условиям задачи два уравнения:

$$5(2x+y+3z)=V,$$

$$3\frac{3}{4}(3x+2y+4z)=V.$$

Пусть $t$ – число часов, за которое в действительности наполнен танкер. Получим третье уравнение:

$$t(x+y+z)=V.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+y+3z=\dfrac{V}{5}, \\ 3x+2y+4z=\dfrac{4V}{15}, \\ x+y+z=\dfrac{V}{t}. \end{cases}$$

Если найдем такие числа $\alpha$ и $\beta$, для которых

$$\alpha(2x+y+3z)+\beta(3x+2y+4z)=x+y+z,$$

то будет справедливо равенство:

$$\alpha\frac{V}{5}+\beta\frac{4V}{15}=\frac{V}{t}.$$

Для нахождения чисел $\alpha$ и $\beta$, сравним в уравнении $\alpha(2x+y+3z)+\beta(3x+2y+4z)=x+y+z$ коэффициенты при одинаковых неизвестных. Получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=1, \\ \alpha+2\beta=1, \\ 3\alpha+4\beta=1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha=-1,\ \beta=1$.

Следовательно, решая уравнение $\dfrac{4V}{15}-\dfrac{V}{5}=\dfrac{V}{t}$, получим $t=15$.

**Ответ.** 15 часов.