Математика. Вариант-22

Задание 1. (5 баллов) Упростить выражение

$$\frac{1}{(x+2009)(x+2012)}+\frac{1}{(x+2012)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2018)}+\frac{1}{(x+2018)(x+2021)}.$$

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 4 скважины, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,2. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Дан равнобедренный треугольник ABC. $AB=BC=20$, $AC=24$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 48.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|}<\dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

Задание 6. (30 баллов) При проведении геологоразведочных работ требуется пробурить скважины типов *A* и *B*. Скважина типа *A* имеет глубину 7 м, типа *B* – 9 м. Расходы на бурение одной скважины типа *A* составляют 50000 руб., а одной скважины типа *B* – 60000 руб. Известно, что суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 329 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 2230000 руб. Найти минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов, которое можно пробурить при заданных условиях.

Задание 1. (5 баллов) Упростить выражение

$$\frac{1}{(x+2009)(x+2012)}+\frac{1}{(x+2012)(x+2015)}+\frac{1}{(x+2015)(x+2018)}+\frac{1}{(x+2018)(x+2021)}.$$

Решение.

Пусть $x+2009=b$, тогда исходное выражение примет вид

$$\frac{1}{b(b+3)}+\frac{1}{(b+3)(b+6)}+\frac{1}{(b+6)(b+9)}+\frac{1}{(b+9)(b+12)}.$$

$$\frac{1}{b(b+3)}+\frac{1}{(b+3)(b+6)}+\frac{1}{(b+6)(b+9)}+\frac{1}{(b+9)(b+12)}=$$

$$=\frac{(b+6)(b+9)(b+12)+b(b+9)(b+12)+b(b+3)(b+12)+b(b+3)(b+6)}{b(b+3)(b+6)(b+9)(b+12)}=$$

$$=\frac{(b+9)(b+12)(b+6+b)+b(b+3)(b+12+b+6)}{b(b+3)(b+6)(b+9)(b+12)}=\frac{(b+9)(b+12)(2b+6)+b(b+3)(2b+18)}{b(b+3)(b+6)(b+9)(b+12)}=$$

$$=\frac{2(b+9)(b+12)(b+3)+2b(b+3)(b+9)}{b(b+3)(b+6)(b+9)(b+12)}=\frac{2(b+3)(b+9)(b+12+b)}{b(b+3)(b+6)(b+9)(b+12)}=\frac{4}{b(b+12)}.$$

Или $\dfrac{4}{(x+2009)(x+2021)}$.

Ответ. $\dfrac{4}{(x+2009)(x+2021)}$.

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 4 скважины, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,2. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Решение:

Пусть вероятность исправной работы скважины равна p, а вероятность выхода из строя – q.

По условию задачи необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 2 скважины, то есть исправно работают или 2, или 3, или 4 скважин.

Найдем вероятность исправной работы любых 2-х скважин – $p\cdot p\cdot q\cdot q$ (работают первая, вторая скважины, не работают третья и четвертая скважины) или $p\cdot q\cdot q\cdot p$ (работают первая, четвертая скважины, не работают – вторая и третья) или т.д. Всего таких комбинаций 6. Следовательно, вероятность работы любых трех скважин равна $6p^2q^2$.

Аналогично находим, что вероятность исправной работы 3-х скважин равна $4p^3q$.

Вероятность исправной работы 4-х скважин равна p^4.

Тогда вероятность исправной работы по крайней мере 3-х скважин равна

$$P=6p^2q^2+4p^3q+p^4.$$

По условию задачи известно, что вероятность выхода из строя скважины равна $q=0{,}2$, тогда вероятность исправной работы скважины равна $p=1-0{,}2=0{,}8$.

Получим $P=6\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^2+4\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2+0{,}8^4=0{,}9728\approx 0{,}97$.

Ответ. $0{,}97$.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Решение.

Длина стороны первого квадрата равна 2, его площадь равна 4.

Длина стороны второго квадрата равна $\sqrt{2}$ (т. Пифагора), его площадь равна 2.

Длина стороны третьего квадрата равна 1, его площадь равна 1.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$, его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}$. И т. д.

Получим последовательность: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$, т.е. $|q|<1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=4$, $q=\frac{1}{2}$, то $S=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$.

Ответ. 8.

Задание 4. (20 баллов) Дан равнобедренный треугольник ABC. $AB=BC=20$, $AC=24$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 48.

Решение.

Проведем прямую BD, где точка D – основание высоты данного треугольника. Проводя прямые, параллельные сторонам BC и BA, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой AC, расположенный в верней (рис. 1) или в нижней (рис. 2) полуплоскости относительно прямой AC.

1. Рассмотрим случай, представленный на рис. 1, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Тогда $DC=12$ и $BD=\sqrt{20^2-12^2}=16$. Пусть $DF=x$, $DE=y$, тогда, используя подобие треугольников BDC и EFD, площадь треугольника GFE, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{16}{y}=\frac{12}{x}, \\ xy=48; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x=3y, \\ xy=48; \end{cases} \quad \begin{cases} x=6, \\ y=8. \end{cases}$$

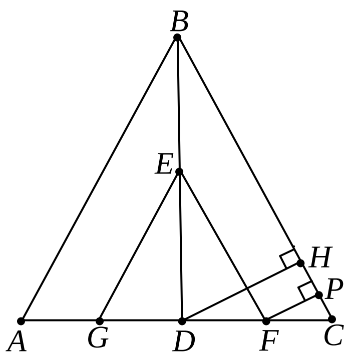

Рис.1

Отсюда следует, что коэффициент подобия равен $\frac{DC}{DF}=\frac{12}{6}=2$.

Проведем перпендикуляры DH и FP на прямую BC. Т.к. высота DH в прямоугольном треугольнике BCD равна $\frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9{,}6$, то $FP = \frac{9{,}6}{2} = 4{,}8$.

2. Рассмотрим случай, представленный на рис. 2, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Здесь $DC = 12$ и $BD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192$. $\frac{BD}{DE} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{FEG}}} = \sqrt{\frac{192}{48}} = 2$, тогда $DE = 8$, $BE = BD + DE = 16 + 8 = 24$. Т.к. $S_{FEG} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot 2 \cdot DG = ED \cdot DG$, $48 = 8 \cdot DG$, $DG = 6$.

$EG = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

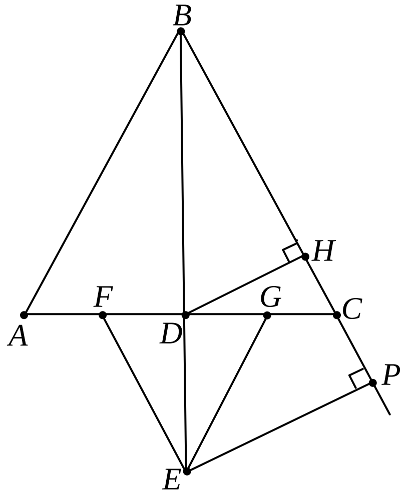

Рис. 2

Из подобия прямоугольных треугольников BPE и EDG получим $\frac{BE}{EG} = \frac{EP}{DG}$.

$EP = \frac{BE \cdot DG}{EG} = \frac{24 \cdot 6}{10} = 14{,}4$.

Ответ. 4,8 или 14,4.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\frac{|x-5| - |x+4|}{|x-2| - |x+1|} < \frac{|x-2| + |x+1|}{|x+4|}$.

Решение.

При ограничении $x \neq 4$ и $x \neq 0{,}5$ умножаем обе части на положительную величину $\frac{|x+4|}{|x-2| + |x+1|}$.

Получим равносильное неравенство $\frac{|(x-5)(x+4)| - (x+4)^2}{(x-2)^2 - (x+1)^2} < 1$.

Выполним преобразования:

$$\frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 8x - 16}{-6x + 3} - 1 < 0,$$

$$\frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 8x - 16 + 6x - 3}{-3(2x-1)} < 0,$$

$$\frac{|x^2 - x - 20| - x^2 - 2x - 19}{2x - 1} > 0.$$

1) Пусть $x^2 - x - 20 \geq 0$, тогда $x \in (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$.

Неравенство примет вид

$\frac{x^2 - x - 20 - x^2 - 2x - 19}{2x - 1} > 0$, $\frac{x+13}{2x-1} < 0$, $-13 < x < \frac{1}{2}$, т.е. $x \in (-13; 0{,}5)$

Учитывая, что $x \in (-\infty; -4) \cup [5; +\infty)$, получим $x \in (-13; -4)$.

2) Пусть $x^2-x-20<0$, тогда $x\in(-4;5)$.

Неравенство примет вид

$\frac{-x^2+x+20-x^2-2x-19}{2x-1}>0$, $\frac{-2x^2-x+1}{2x-1}>0$, $\frac{(x+1)(2x-1)}{2x-1}<0$, $x<-1$, т.е. $x\in(-\infty;-1)$.

Учитывая, что $x\in(-4;5)$, получим $x\in(-4;-1)$.

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x\in(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

Ответ. $(-13;-4)\cup(-4;-1)$.

Задание 6. (30 баллов) При проведении геологоразведочных работ требуется пробурить скважины типов *A* и *B*. Скважина типа *A* имеет глубину 7 м, типа *B* – 9 м. Расходы на бурение одной скважины типа *A* составляют 50000 руб., а одной скважины типа *B* – 60000 руб. Известно, что суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 329 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 2230000 руб. Найти минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов, которое можно пробурить при заданных условиях.

Решение.

Пусть x и y – количество скважин типа *A* и *B* соответственно. Тогда $t=x+y$ – суммарное количество скважин. Согласно условиям задачи систему:

$$\begin{cases}50000x+60000y\le 2230000,\\ 7x+9y\ge 329,\\ t=x+y.\end{cases}$$

Последовательно выполняя преобразования, получим

$$\begin{cases}5x+6(t-x)\le 223,\\ 7x+9(t-x)\ge 329,\\ y=t-x,\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\le \dfrac{223+x}{6},\\ t\ge \dfrac{329+2x}{9}.\end{cases}$$

Решим систему графически. Изобразим на координатной плоскости *Oxt* (см. рис.) множество решений системы неравенств, учитывая, что $t>0$, $x>0$.

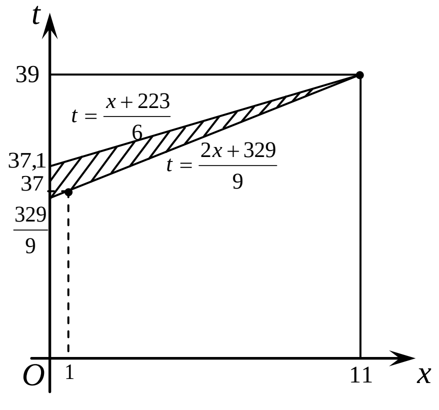

рис.

Т.к. $t\in N$ и $x\in N$, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x,t)=(1;37)$, с наибольшей – $(x,t)=(11;39)$.

Замечание. *Возможны другие способы решения задачи.*

Ответ. 37; 39.