Математика
Вариант-1.2

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<2$.

Задание 2. (10 баллов) Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 мешков (в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c. Диагональ длины l делит площадь трапеции в отношении 5:7. Найти основания трапеции.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $5x^5+3x^4-8x^3-8x^2+3x=-5$.

Задание 6. (30 баллов) Для контроля за составом и качеством добываемого углеводородного сырья необходимо произвести отбор проб нефтепродуктов из скважин A и B. Объем одной пробы из скважины A равен 3 л, из скважины B – 4 л. По каждой пробе скважины A требуется провести 5 видов анализов, по каждой пробе скважины B – 7 видов. Известно, что объем всех проб не должен превышать 150 л, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 250. Найти минимальное и максимальное суммарное количество проб нефтепродуктов из обеих скважин, которое можно отобрать при заданных условиях.

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<2$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<1$.

Справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2020^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2019\cdot 2020}.$$

Так как

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{2019\cdot 2020}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)=1-\frac{1}{2020}=\frac{2019}{2020},$$ то

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\frac{1}{2021^2}<\frac{2019}{2020}<1.$$

Что требовалось доказать.

Задание 2. (10 баллов) Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 11 мешков (в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Решение.

Для выполнения условия задачи (произведение чисел на карточках делится на 9), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий:

– среди чисел на карточках в каждом из 11 мешков есть хотя бы одно, кратное 9;

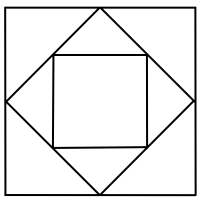
– среди чисел на карточках в каждом из 11 мешков хотя бы два, кратных 3.

Из чисел от 1 до 50 ровно пять кратны 9 (это числа 9, 18, 27, 36, 45)., т.е. хотя бы шесть мешков не содержат карточек с числом, кратным 9. Эти мешки должны содержать как минимум по два числа, кратных 3, но не кратных 9. Тогда всего чисел, кратных 3, но не кратных 9, должно быть не менее 12. Но в промежутке от 1 до 50 ровно 11 таких чисел (3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48). Следовательно, такой способ разложения карточек по мешкам невозможен.

Ответ. Нет.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Решение.



Длина стороны первого квадрата равна 1, его периметр равен 4.

Длина стороны второго квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (по т. Пифагора), его периметр равен $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Длина стороны третьего квадрата равна $\frac{1}{2}$, его периметр равен $\frac{4}{2}$.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, его периметр равен $\frac{4}{2\sqrt{2}}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{4}$, его периметр равен $\frac{4}{4}$. И т.д.

Получим последовательность: 4, $\frac{4}{\sqrt{2}}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{4}{2\sqrt{2}}$, $\frac{4}{4}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $|q|<1$.

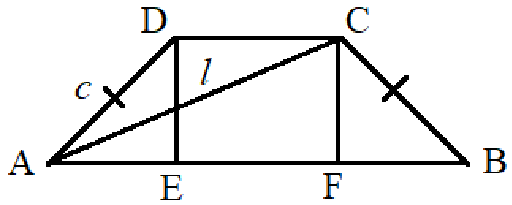
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1=4,\ q=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S=\frac{4}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Ответ. $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Задание 4. (20 баллов) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c. Диагональ, равная l, делит площадь ее в отношении 5:7. Найти основания трапеции.

Решение.



Из условия известно: $AD=c$, $AC=l$.

S_1 и S_2 – площади треугольников ACD и ABC соответственно. Тогда $\frac{S_1}{S_2}=\frac{5}{7}$.

1) Обозначим $CD=a$ и $AB=b$ (искомые величины).

2) Проведем высоты DE и CF.

3) $\Delta AED=\Delta BFC$ (прямоугольные). $DE=CF=h$ и $AD=CB$ ($ABCD$ – равнобедренная трапеция).

4) Очевидно , что $AE=FB$. Тогда $AE=\frac{b-a}{2}$, $AF=b-FB=b-AE=\frac{a+b}{2}$.

5) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}CD\cdot h}{\frac{1}{2}AB\cdot h}=\frac{CD}{AB}=\frac{a}{b}=\frac{5}{7}$. Откуда $a=\frac{5}{7}b$, $AF=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{6}{7}b$, $AE=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{7}b$.

6) В ΔAED $h=DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{c^2-\frac{1}{49}b^2}$.

7) В ΔAFC $h=CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=\sqrt{l^2-\frac{36}{49}b^2}$.

8) Из пунктов 6 и 7 следует, что $\sqrt{c^2-\frac{1}{49}b^2}=\sqrt{l^2-\frac{36}{49}b^2}$.

Тогда $c^2-\frac{1}{49}b^2=l^2-\frac{36}{49}b^2$,

$$b=\sqrt{\frac{7}{5}\left(l^2-c^2\right)}.$$

Т.к. $a=\frac{5}{7}b$, то $a=\sqrt{\frac{5}{7}\left(l^2-c^2\right)}$.

Ответ. $CD=\sqrt{\frac{5}{7}\left(l^2-c^2\right)}$, $AB=\sqrt{\frac{7}{5}\left(l^2-c^2\right)}$.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $5x^5+3x^4-8x^3-8x^2+3x=-5$.
Решение.

Итак, $5x^5+3x^4-8x^3-8x^2+3x+5=0$.

Это симметричное (возвратное) уравнение нечетной степени, следовательно, оно имеет корень $x=-1$. Разделим многочлен, имеющийся в левой части данного уравнения, на выражение $x+1$.

Получим уравнение $5x^4-2x^3-6x^2-2x+5=0$.

Для решения полученного уравнения (симметричное, четной степени), разделим на x^2 ($x=0$ не является корнем этого уравнения).

Тогда уравнение примет вид: $5x^2-2x-6-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}=0$, или, сгруппировав члены с одинаковыми коэффициентами, получим:

$5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$. Сделав замену $x+\frac{1}{x}=t$, $\left(x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2\right)$, получим уравнение:

$5(t^2-2)-2t-6=0$, $5t^2-2t-16=0$.

Откуда $t_1=-\frac{8}{5}$, $t_2=2$.

Следовательно, $x+\frac{1}{x}=-\frac{8}{5}$, $5x^2+8x+5=0$ и $x+\frac{1}{x}=2$, $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$.

Уравнение $5x^2+8x+5=0$ не имеет корней на множестве действительных чисел, т.е. $x\in\varnothing$.

Решая равнение $x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, получим еще один корень (2-х кратный) $x_{2,3}=1$.

Ответ. $x=\pm1$.

Задание 6. (30 баллов) Для контроля за составом и качеством добываемого углеводородного сырья необходимо произвести отбор проб нефтепродуктов из скважин *A* и *B*. Объем одной пробы из скважины *A* равен 3 л, со скважины *B* – 4 л. По каждой пробе скважины *A* требуется провести 5 видов анализов, по каждой пробе скважины *B* – 7 видов. Известно, что объем всех проб не должен превышать 150 л, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 250. Найти минимальное и максимальное суммарное количество проб нефтепродуктов из обеих скважин, которое можно отобрать при заданных условиях.
Решение.

Пусть x и y – количество проб скважин *A* и *B* соответственно. Тогда $t=x+y$ – общее количество проб. Согласно условиям задачи имеем систему:

$$\begin{cases}3x+4y\le150,\\5x+7y\ge250,\\t=x+y.\end{cases}$$

Последовательно выполняя преобразования, получим:

$$\begin{cases}3x+4(t-x)\le150,\\5x+7(t-x)\ge250,\\y=t-x;\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\le\dfrac{150+x}{4},\\t\ge\dfrac{250+2x}{7}.\end{cases}$$

Решим систему графически. Изобразим на координатной плоскости Oxt (см. рис.) множество решений системы неравенств, учитывая, что $t > 0$, $x > 0$.

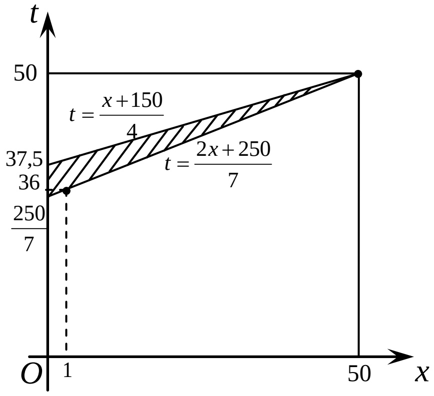


рис.

Т.к. $t \in N$ и $x \in N$, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x, t) = (1; 36)$, с наибольшей – $(x, t) = (50; 50)$.

Замечание. *Возможны другие способы решения задачи.*

Ответ. 36; 50.