

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < 2$.

Задание 2. (10 баллов) Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 10 мешков (в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c . Диагональ длины l делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти основания трапеции.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x = -2$.

Задание 6. (30 баллов) На полевых работах геологу необходимо собрать образцы пород типов A и B . Вес одного образца типа A равен 3 кг, типа B – 4 кг. По каждому из образцов типа A требуется провести 5 видов анализов, по каждому образцу типа B – 7 видов. Известно, что вес всех образцов не должен превышать 150 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 250. Найти минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов, которое можно собрать при заданных условиях.

Задание 1. (5 баллов) Доказать неравенство $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < 2$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < 1$.

Справедливо неравенство:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021}.$$

$$\text{Т.к. } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}\right) = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021},$$

$$\text{то } \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < \frac{2020}{2021} < 1.$$

Что требовалось доказать.

Задание 2. (10 баллов) Числа от 1 до 50 написаны на карточках. Можно ли разложить эти карточки в 10 мешков (в каждый мешок попала хотя бы одна карточка) так, чтобы в каждом мешке произведение чисел на карточках делилось на 9?

Решение.

Для выполнения условия задачи (произведение чисел на карточках делится на 9), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено одно из двух условий:

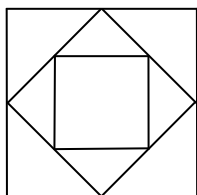
- среди чисел на карточках в каждом из 10 мешков есть хотя бы одно, кратное 9;
- среди чисел на карточках в каждом из 10 мешков хотя бы два, кратных 3.

Из чисел от 1 до 50 ровно пять чисел, кратных 9 (это числа 9, 18, 27, 36, 45), т.е. хотя бы пять мешков не содержат карточек с числом, кратным 9. Эти мешки должны содержать как минимум по два числа, кратных 3, но не кратных 9. Тогда всего чисел, кратных 3, но не кратных 9, должно быть не менее 10. Так как в промежутке от 1 до 50 ровно 11 таких чисел (3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48), следовательно, такой способ разложения карточек по мешкам возможен.

Ответ. Да.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 2. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти сумму периметров этих квадратов.

Решение.



Длина стороны первого квадрата равна 2, его периметр равен 8.

Длина стороны второго квадрата равна $\sqrt{2}$ (по т. Пифагора), его периметр равен $4\sqrt{2}$.

Длина стороны третьего квадрата равна 1, его периметр равен 4.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$, его периметр равен $\frac{4\sqrt{2}}{2}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{2}$, его периметр равен $\frac{4}{2}$. И т.д.

Получим последовательность: $8, 4\sqrt{2}, 4, \frac{4\sqrt{2}}{2}, \frac{4}{2}, \dots$ Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $|q| < 1$.

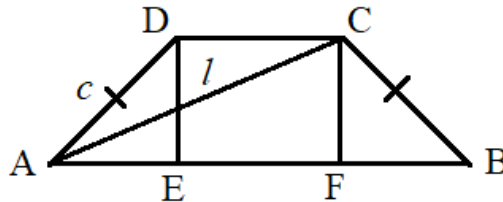
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $S = \frac{8}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Ответ. $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Задание 4. (20 баллов) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна c . Диагональ длины l делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найти основания трапеции.

Решение.



Из условия известно: $AD = c$, $AC = l$.

S_1 и S_2 – площади треугольников ACD и ABC соответственно. Тогда имеем $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}$.

1) Обозначим $CD = a$ и $AB = b$ (искомые величины).

2) Проведем высоты DE и CF .

3) $\triangle AED = \triangle BFC$ (прямоугольные). $DE = CF = h$ и $AD = CB$ ($ABCD$ – равнобедренная трапеция).

4) Очевидно, что $AE = FB$. Тогда $AE = \frac{b-a}{2}$, $AF = b - FB = b - AE = \frac{a+b}{2}$.

5) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}CD \cdot h}{\frac{1}{2}AB \cdot h} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$. Откуда $a = \frac{3}{5}b$, $AF = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{4}{5}b$, $AE = \frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{5}b$.

6) В $\triangle AED$ $h = DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{1}{25}b^2}$.

7) В $\triangle AFC$ $h = CF = \sqrt{AC^2 - AF^2} = \sqrt{l^2 - \frac{16}{25}b^2}$.

8) Из пунктов 6 и 7 следует, что $\sqrt{c^2 - \frac{1}{25}b^2} = \sqrt{l^2 - \frac{16}{25}b^2}$.

Тогда $c^2 - \frac{1}{25}b^2 = l^2 - \frac{16}{25}b^2$,

$$b = \sqrt{\frac{5}{3}(l^2 - c^2)}.$$

Т.к. $a = \frac{3}{5}b$, то $a = \sqrt{\frac{3}{5}(l^2 - c^2)}$.

Ответ. $CD = \sqrt{\frac{3}{5}(l^2 - c^2)}$, $AB = \sqrt{\frac{5}{3}(l^2 - c^2)}$.

Задание 5. (20 баллов) Решить уравнение $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x = -2$.

Решение.

Итак, $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$.

Это симметричное (возвратное) уравнение нечетной степени. Следовательно, оно имеет корень $x = -1$. Разделим многочлен, имеющийся в левой части данного уравнения, на выражение $x+1$.

Получим уравнение $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Для решения полученного уравнения (симметричное, четной степени), разделим на x^2 ($x=0$ не является корнем этого уравнения).

Тогда уравнение примет вид: $2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$, или, сгруппировав члены с одинаковыми коэффициентами, получим:

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0$. Сделав замену $x + \frac{1}{x} = t$ ($x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$), получим уравнение:

$2(t^2 - 2) + 3t - 16 = 0$, $2t^2 + 3t - 20 = 0$.

Откуда $t_1 = -4$, $t_2 = 2,5$.

Следовательно, $x + \frac{1}{x} = -4$, $x^2 + 4x - 1 = 0$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Решая эти уравнения, получим еще четыре корня $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = 2$, $x_5 = \frac{1}{2}$.

Задание 6. (30 баллов) На полевых работах геологу необходимо набрать образцы пород типов A и B . Вес одного образца типа A равен 3 кг, типа B – 4 кг. По каждому из образцов типа A требуется провести 5 видов анализов, по каждому образцу типа B – 7 видов. Известно, что вес всех образцов не должен превышать 150 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее 250. Найти минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов, которое можно собрать при заданных условиях.

Решение.

Пусть x и y – количество образцов типа A и B соответственно. Тогда $t = x + y$ – всего образцов. Согласно условиям задачи имеем систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 150, \\ 5x + 7y \geq 250, \\ t = x + y. \end{cases}$$

Последовательно выполняя преобразования, получим:

$$\begin{cases} 3x + 4(t - x) \leq 150, \\ 5x + 7(t - x) \geq 250, \\ y = t - x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \leq \frac{150 + x}{4}, \\ t \geq \frac{250 + 2x}{7}. \end{cases}$$

Решим систему графически. Изобразим на координатной плоскости Oxt (см. рис.) множество решений системы неравенств, учитывая, что $t > 0$, $x > 0$.

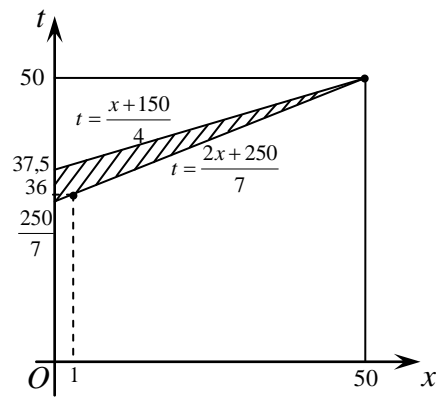


рис.

Т.к. $t \in N$ и $x \in N$, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x, t) = (1; 36)$, с наибольшей – $(x, t) = (50; 50)$.

Замечание. Возможны другие способы решения задачи.

Ответ. 36; 50.