Математика. Вариант-21

Задание 1. (5 баллов) Упростить выражение

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2018)}+\frac{1}{(x+2018)(x+2020)}+\frac{1}{(x+2020)(x+2022)}.$$

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Дан равнобедренный треугольник ABC. $AB=BC=10$, $AC=12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

Задание 6. (30 баллов) При проведении геологических исследований требуется пробурить скважины типов *A* и *B*. Скважина типа *A* имеет глубину 70 м, типа *B* – 90 м. Расходы на бурение одной скважины типа *A* составляют 500 тыс. руб., а одной скважины типа *B* – 600 тыс. руб. Известно, что суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 3290 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 22300 тыс. руб. Найти минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов, которое можно пробурить при заданных условиях.

Задание 1. (5 баллов) Упростить выражение

$$\frac{1}{(x+2014)(x+2016)}+\frac{1}{(x+2016)(x+2018)}+\frac{1}{(x+2018)(x+2020)}+\frac{1}{(x+2020)(x+2022)}.$$

Решение.

Пусть $x+2014=a$, тогда исходное выражение примет вид

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}.$$

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}=$$

$$=\frac{(a+4)(a+6)(a+8)+a(a+6)(a+8)+a(a+2)(a+8)+a(a+2)(a+4)}{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}=$$

$$=\frac{(a+6)(a+8)(a+4+a)+a(a+2)(a+8+a+4)}{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}=\frac{(a+6)(a+8)(2a+4)+a(a+2)(2a+12)}{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}=$$

$$=\frac{2(a+6)(a+8)(a+2)+2a(a+2)(a+6)}{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}=\frac{2(a+6)(a+2)(a+8+a)}{a(a+2)(a+4)(a+6)(a+8)}=\frac{4}{a(a+8)}.$$

Или $\dfrac{4}{(x+2014)(x+2022)}$.

Ответ. $\dfrac{4}{(x+2014)(x+2022)}$.

Задание 2. (10 баллов) Эксплуатируются 5 скважин, каждая из которых за месяц может независимо от других выйти из строя с вероятностью 0,1. Необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины. Какова вероятность обеспечения необходимой подачи нефти? Ответ округлить до сотых.

Решение.

Пусть вероятность исправной работы скважины равна p, а вероятность выхода из строя – q.

По условию задачи необходимая подача нефти обеспечивается, если исправны, по крайней мере, 3 скважины, то есть исправно работают или 3, или 4, или 5 скважин.

Найдем вероятность исправной работы любых 3-х скважин – $p\cdot p\cdot p\cdot q\cdot q$ (работают первая, вторая и третья скважины, не работают четвертая и пятая скважины) или $p\cdot p\cdot q\cdot p\cdot q$ (работают первая, вторая и четвертая скважины, не работают – третья и пятая) или т.д. Всего таких комбинаций 10. Следовательно, вероятность работы любых трех скважин равна $10p^3q^2$.

Аналогично находим, что вероятность исправной работы 4-х скважин равна $5p^4q$.

Вероятность исправной работы 5-ти скважин равна p^5.

Тогда вероятность исправной работы по крайней мере 3-х скважин равна

$$P=10p^3q^2+5p^4q+p^5.$$

По условию известно, что вероятность выхода из строя скважины равна $q=0{,}1$, тогда вероятность исправной работы скважины равна $p=1-0{,}1=0{,}9$.

Получим $P=10\cdot 0{,}9^3\cdot 0{,}1^2+5\cdot 0{,}9^4\cdot 0{,}1+0{,}9^5=0{,}99144\approx 0{,}99$.

Ответ. $0{,}99$.

Задание 3. (15 баллов) Сторона квадрата равна 1. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т.д. Найти сумму площадей этих квадратов.

Решение.

Длина стороны первого квадрата равна 1, его площадь равна 1.

Длина стороны второго квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (т. Пифагора), его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Длина стороны третьего квадрата равна $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}$.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, его площадь равна $\frac{1}{8}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{4}$, его площадь равна $\frac{1}{16}$. И т. д.

Получим последовательность: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, т.е. $|q| < 1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1 = 1,\ q = \frac{1}{2}$, то $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Ответ: 2.

Задание 4. (20 баллов) Дан равнобедренный треугольник ABC. $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Параллельно боковым сторонам треугольника на одинаковом расстоянии от них проведены прямые. Найти это расстояние, если площадь треугольника, образованного этими прямыми и основанием, лежащим на прямой AC, равна 12.

Решение.

Проведем прямую BD, где точка D – основание высоты данного треугольника. Проводя прямые, параллельные сторонам BC и BA, убеждаемся, что они могут образовывать треугольник с основанием, лежащим на прямой AC, расположенный в верней (рис. 1) или в нижней (рис. 2) полуплоскости относительно прямой AC.

1. Рассмотрим случай, представленный на рис. 1, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Тогда $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. Пусть $DF = x$, $DE = y$, тогда, используя подобие треугольников BDC и EFD, площадь треугольника GFE, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{8}{y} = \frac{6}{x}, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 3y, \\ xy = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 3y, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

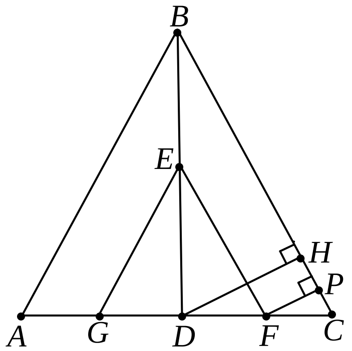

Рис.1

Отсюда следует, что коэффициент подобия равен $\frac{DC}{DF} = \frac{6}{3} = 2$.

Проведем перпендикуляры DH и FP на прямую BC. Т.к. высота DH в прямоугольном треугольнике BCD равна $\frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8$, то $FP = \frac{4{,}8}{2} = 2{,}4$.

2. Рассмотрим случай, представленный на рис. 2, когда $EF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Здесь $DC = 6$ и $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$. $\frac{BD}{DE} = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{FEG}}} = \sqrt{\frac{48}{12}} = 2$, тогда $DE = 4$,

$BE = BD + DE = 8 + 4 = 12$. Т.к. $S_{FEG} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot FG = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot 2 \cdot DG = ED \cdot DG$, $12 = 4 \cdot DG$, $DG = 3$.

$EG = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

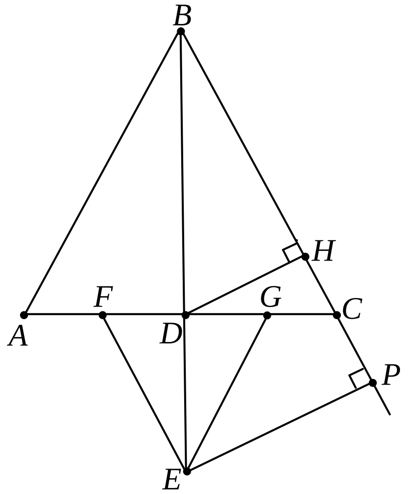

Рис. 2

Из подобия прямоугольных треугольников BPE и EDG получим $\frac{BE}{EG} = \frac{EP}{DG}$.

$EP = \frac{BE \cdot DG}{EG} = \frac{12 \cdot 3}{5} = 7{,}2$.

Ответ. 2,4 или 7,2.

Задание 5. (20 баллов) Решить неравенство $\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$.

Решение.

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$$

При ограничениях $x \neq 4$ и $x \neq 2{,}5$ умножим обе части неравенства на положительную величину $\frac{|x-4|}{|x-3| + |x-2|}$.

Получим равносильное неравенство $\frac{(x-4)^2 - |(x-1)(x-4)|}{(x-3)^2 - (x-2)^2} < 1$.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 - 8x + 16 - |x^2 - 5x + 4|}{-2x + 5} - 1 < 0,$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16 - |x^2 - 5x + 4| + 2x - 5}{-2x + 5} < 0,$$

$$\frac{x^2 - 6x + 11 - |x^2 - 5x + 4|}{2x - 5} > 0.$$

1) Пусть $x^2 - 5x + 4 \geq 0$, тогда $x \in (-\infty;1] \cup (4;+\infty)$.

Неравенство примет вид

$\frac{x^2-6x+11-x^2+5x-4}{2x-5}>0$, $\frac{-x+7}{2x-5}>0$, $2{,}5<x<7$, т.е. $x\in(2{,}5;7)$.

Учитывая, что $x\in(-\infty;1]\cup(4;+\infty)$, получим $x\in(4;7)$.

2) Пусть $x^2-5x+4<0$, тогда $x\in(1;4)$.

Неравенство примет вид

$\frac{x^2-6x+11+x^2-5x+4}{2x-5}>0$, $\frac{2x^2-11x+15}{2x-5}>0$, $\frac{(x-3)(2x-5)}{2x-5}>0$, $x>3$, т.е. $x\in(3;+\infty)$.

Учитывая, что $x\in(1;4)$, получим $x\in(3;4)$.

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $x\in(3;4)\cup(4;7)$.

Ответ. $(3;4)\cup(4;7)$.

Задание 6. (30 баллов) При проведении геологических исследований требуется пробурить скважины типов *A* и *B*. Скважина типа *A* имеет глубину 70 м, типа *B* – 90 м. Расходы на бурение одной скважины типа *A* составляют 500 тыс. руб., а одной скважины типа *B* – 600 тыс. руб. Известно, что суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 3290 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 22300 тыс. руб. Найти минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов, которое можно пробурить при заданных условиях.

Решение.

Пусть x и y – количество скважин типа *A* и *B* соответственно. Тогда $t=x+y$ – суммарное количество скважин. Согласно условиям задачи систему:

$$\begin{cases}500x+600y\le 22300,\\ 70x+90y\ge 3290,\\ t=x+y.\end{cases}$$

Последовательно выполняя преобразования, получим

$$\begin{cases}5x+6(t-x)\le 223,\\ 7x+9(t-x)\ge 329,\\ y=t-x,\end{cases}$$

$$\begin{cases}t\le\dfrac{223+x}{6},\\ t\ge\dfrac{329+2x}{9}.\end{cases}$$

Решим систему графически. Изобразим на координатной плоскости Oxt (см. рис.) множество решений системы неравенств, учитывая, что $t>0$, $x>0$.

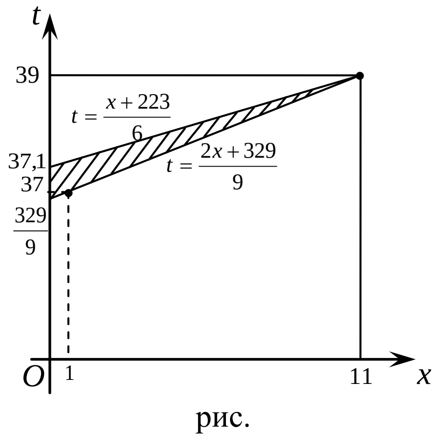

рис.

Т.к. $t\in N$ и $x\in N$, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x,t)=(1;37)$, с наибольшей – $(x,t)=(11;39)$.

Замечание. *Возможны другие способы решения задачи.*

Ответ. 37; 39.