Математика. Вариант-32

Задание 1. (5 баллов) Найти сумму всех цифр, используемых при записи натуральных чисел от 1 до 1 000 000.

Задание 2. (10 баллов) Решить уравнение $f(f(x))=0$, если $f(x)=x^2-2020x$.

Задание 3. (15 баллов) В квадрат со стороной 2 вписана окружность, в эту окружность вписан квадрат, в квадрат снова вписана окружность и т.д. Найти сумму площадей всех квадратов.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n=\frac{2021}{n}$, для $n=1,2,\ldots$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, вложить в первый квадрат без наложений?

Задание 5. (20 баллов) В ящике размещены 2021 пробирок с пробами нефтепродуктов из скважин A и $Б$. Может ли проб из скважины $Б$ быть столько, чтобы вероятность взять наудачу две пробирки с пробами из одной скважины была равна 0,5?

Задание 6. (30 баллов) Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован вырыт в действительности?

Задание 1. (5 баллов) Найти сумму всех цифр, используемых при записи всех натуральных чисел от 1 до 1 000 000.

Решение.

Если добавить 0 (нуль), то можно образовать 500 000 000 пар чисел:

$(0;999999)$, $(1;999998)$, $(2;999997)$, …, $(499998;500001)$, $(499999;500000)$.

Сумма цифр в каждой паре будет равна $6 \cdot 9 = 54$.

Если добавить 1 в сумму цифр для неучтенного при этом число 1 000 000, то получим всю сумму цифр: $500000 \cdot 54 + 1 = 27000001$.

Ответ. 27 000 001.

Задание 2. (10 баллов) Решить уравнение $f(f(x)) = 0$, если $f(x) = x^2 - 2020x$.

Решение.

Пусть $f(x) = y$. Тогда имеем уравнение $f(y) = 0$, т.е. $y^2 - 2020y = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 2020$.

Решим два полученных уравнения: $f(x) = 0$ или $f(x) = 2020$.

Получим, $x^2 - 2020x = 0$ или $x^2 - 2020x = 2020$.

1) $x^2 - 2020x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2020$.

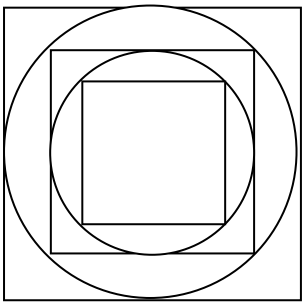
2) $x^2 - 2020x = 2020$, $x^2 - 2020x - 2020 = 0$, $D = (-2020)^2 - 4 \cdot 2020 = \left(4\sqrt{255530}\right)^2$,

$x_{3,4} = 1010 \pm 2\sqrt{255530}$.

Ответ. $x_1 = 0$, $x_2 = 2020$, $x_{3,4} = 1010 \pm 2\sqrt{255530}$.

Задание 3. (15 баллов) В квадрат со стороной 2 вписана окружность, в эту окружность вписан квадрат, в квадрат снова вписана окружность и т.д. Найти сумму площадей всех квадратов.

Решение.



Длина стороны первого квадрата равна 2, его площадь равна 4.

Длина стороны второго квадрата равна $\sqrt{2}$ (т. Пифагора), его площадь равна 2.

Длина стороны третьего квадрата равна 1, его площадь равна 1.

Длина стороны четвертого квадрата равна $\frac{1}{\sqrt{2}}$, его площадь равна $\frac{1}{2}$.

Длина стороны пятого квадрата равна $\frac{1}{2}$, его площадь равна $\frac{1}{4}$. И т. д.

Получим последовательность: 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, … Эта последовательность представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$, т.е. $|q| < 1$.

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Т.к. $b_1 = 4,\ q = \frac{1}{2}$, то $S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Ответ. 8.

Задание 4. (20 баллов) Заданы квадраты со сторонами $a_n = \frac{2021}{n}$, для $n = 1,2,...$ Можно ли все квадраты, начиная со второго, уложить в первый квадрат без наложений?

Решение.

Разделим квадраты на группы так, чтобы количество квадратов в группе было ровно 2 в степени номера группы: $\left(\frac{2021}{2}; \frac{2021}{3}\right)$, $\left(\frac{2021}{4}; \frac{2021}{5}; \frac{2021}{6}; \frac{2021}{7}\right)$, … .

Сумма длин сторон квадратов в n-ой группе равна

$$2021\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + ... + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) < 2021 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^n \text{ раз}} = 2021 \cdot 1 = 2021.$$

Квадраты n-ой группы помещаются рядом в прямоугольник с высотой $\frac{2021}{2^n}$ и шириной 2021. Помещая эти прямоугольники, содержащие группы квадратов, один на другой, получим прямоугольник шириной 2021 и высотой, равной сумме высот прямоугольников:

$$2021\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^n} + ...\right) = 2021,$$

т.е. в первый квадрат поместились без наложения все квадраты, начиная со второго.

Ответ. Да, можно.

Задание 5. (20 баллов) В ящике 2021 пробирок с пробами нефтепродуктов со скважин A и $Б$. Может ли проб со скважины $Б$ быть столько, чтобы вероятность взять наудачу две пробирки с пробами с одной скважины была равна 0,5?

Решение.

Пусть в ящике $n+m$ пробирок, из которых n с пробами скважины A и m – скважины $Б$. тогда вероятность взять две пробирки с пробами с одной скважины равна сумме вероятностей $p(AA) + p(ББ)$: взять две пробирки с пробами со скважины A или взять две пробирки с пробами со скважины $Б$.

$$p(AA) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1};\quad p(ББ) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1}.$$

$$p(AA) + p(ББ) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{n-1}{n+m-1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} = \frac{n^2 - n + m^2 - m}{(n+m)(n+m-1)} = \frac{1}{2}.$$

Откуда $2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m = (n+m)(n+m-1)$,

$$2n^2 - 2n + 2m^2 - 2m = n^2 + 2nm + m^2 - n - m,$$

$$n^2 - 2nm + m^2 = n + m,$$

$$(n-m)^2 = n + m.$$

Т.к. по условию задачи в ящике 2021 пробирок с пробами, т.е. $n + m = 2021$, то $(n-m)^2 = 2021$. Данное уравнение целых решений не имеет.

Ответ. Не может.

Задание 6. (30 баллов) Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего – в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, а второго – в 2 раза, а третьего – в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован вырыт в действительности?

Решение.

Обозначим объем котлована V (а некоторых единицах), а производительности первого, второго и третьего экскаваторов через x, y, z, соответственно.

Составим по условиям задачи два уравнения:

$$5(2x + y + 3z) = V,$$

$$3\frac{3}{4}(3x + 2y + 4z) = V.$$

Пусть t – число дней, за которое в действительности вырыт котлован. Получим третье уравнение:

$$t(x + y + z) = V.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = \dfrac{V}{5}, \\ 3x + 2y + 4z = \dfrac{4V}{15}, \\ x + y + z = \dfrac{V}{t}. \end{cases}$$

Если найдем такие числа α и β, для которых

$$\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z,$$

то будет справедливо равенство:

$$\alpha\frac{V}{5} + \beta\frac{4V}{15} = \frac{V}{t}.$$

Для нахождения чисел α и β, сравним в уравнении $\alpha(2x + y + 3z) + \beta(3x + 2y + 4z) = x + y + z$ коэффициенты при одинаковых неизвестных. Получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 1, \\ \alpha + 2\beta = 1, \\ 3\alpha + 4\beta = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $\alpha = -1$, $\beta = 1$.

Следовательно, решая уравнение $\frac{4V}{15} - \frac{V}{5} = \frac{V}{t}$, получим $t = 15$.

Ответ. 15 дней.