10 класс

Вариант 4

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 = 7 м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u = 1 м/с с высоты H = 4 м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в $k = 1{,}21$ раза. Определите время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения g = 10 м/с^2.

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u\tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H\frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2}\left(\frac{H}{V_0 + u}\right)^2 = 2{,}25 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g\tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g\tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V_{11}' = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} = 2 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V''_{11} = \sqrt{u^2 + 2gH} = 9 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V''_{11} = V'_{11} + g\tau'_1 .$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau'_1 = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0{,}3 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V'_{21} - g\tau'_1 = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = -1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h'_1 = h_1 + V'_{21}\tau'_1 - \frac{g\tau_1'^2}{2} \approx 2{,}65 \text{ м} .$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V''_{11}}{\sqrt{k}} \approx 8{,}18 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

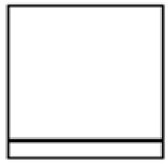
$$\tau_2 = \frac{h'_1}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0{,}29 \text{ с} .$$

Ответ: $\tau_2 \approx 0{,}29$ с .

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для высоты столкновения шариков	**1**
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	**2**

Записано выражение для расчета времени полета	**1**
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	**1**
Всего баллов	**6**



2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет a = 1,2 м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен метиловым спиртом. Какое количество вещества идеального газа нужно закачать в пространство под поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние Δh = 0,8 мм? Температуры газа и спирта одинаковы, постоянны и равны t = 27 °C. Значения универсальной газовой постоянной R = 8,31 Дж/(К·моль), ускорения свободного падения g = 10 м/с^2 плотности спирта ρ = 810 кг/м^3. Сжимаемость спирта (относительное изменение объема при изотермическом изменении давления) составляет $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-10}$ Па$^{-1}$.

Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \rho g a.$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \rho g a + \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества идеального газа получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a^3 \Delta h}{RT}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 0{,}39 \text{ моль}.$$

Ответ: $\nu = \frac{a^3 \Delta h}{RT}\left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2}\right) \approx 0{,}39$ моль.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Получено выражение для относительного изменения объема	**1**
Получено выражение для давления	**1**

Получен ответ в общем виде	**1**
Получен окончательный ответ в виде числа	**1**
Всего баллов	**4**

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M, находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением a. Количество теплоты, сообщенное газу, равно Q. Определите время, за которое газу была сообщена теплота. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V}\Delta T .$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа.

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T .$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2} .$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R} .$$

В окончательной форме получаем

$$\tau = \sqrt{\frac{2Q}{Ma^2\left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)}} .$$

Ответ: $\tau = \sqrt{\frac{2Q}{Ma^2\left(1+\frac{c_{\mu V}}{R}\right)}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для первого начала термодинамики	**1**
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	**1**
Записана теорема об изменении кинетической энергии	**2**

Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	**2**
Всего баллов	**6**

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально со скоростью V_1, имея ускорение a_1. После удара мяч полетел вертикально вверх с ускорением a_2. Определите скорость мяча непосредственно после удара.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2}V_2^2 + mg}{m} = a_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g\,.$$

Из этого выражения получаем:

$$V_2 = V_1\sqrt{\frac{a_2 - g}{a_1}}.$$

Ответ: $V_2 = V_1\sqrt{\frac{a_2-g}{a_1}}$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	**1**
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	**1**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**2**
Всего баллов	**4**

5. (6 баллов) Проводящая сфера радиусом R имеет заряд Q. Определите давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

Указание. Площадь сферы равна $4\pi R^2$.

Возможное решение. Выделим на поверхности сферы малый элемент площадью ΔS. Заряд этого элемента равен

$$\Delta Q = \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2}.$$

Поскольку элемент малый, его кривизной можно пренебречь, считая его участком плоскости. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом этого элемента, равна

$$E_1 = \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 \Delta S} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемая вблизи поверхности сферы всем зарядом сферы, равна

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Значит, вклад поля всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ в суммарную напряженность поля равен

$$E_2 = E_1 = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}.$$

Сила, с которой поле всех зарядов сферы за вычетом заряда ΔQ действует на заряд ΔQ, равна

$$F = E_2 \Delta Q = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{Q\Delta S}{4\pi R^2},$$

а давление на малый элемент

$$p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}.$$

В силу сферической симметрии давление во всех точках сферы одинаково. Сила взаимодействия направлена от центра сферы.

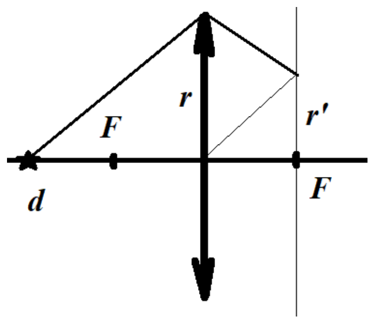
Ответ: $p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0 \pi^2 R^4}$.

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Определен заряд элемента сферы	**1**
Записаны выражения для напряженностей E_1 и E_2	**2**
Записано выражение для силы взаимодействия	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**6**

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии большем фокусного от линзы помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D'. Определите расстояние от фокуса линзы до источника света.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что



$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Откуда

$$d' = d - F = F\left(\frac{D}{D'} - 1\right).$$

Ответ: $d' = d - F = F\left(\frac{D}{D'} - 1\right)$.

Критерии оценивания

Выполнение	**Балл**
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	**0**
Построен чертеж	**1**
Рассмотрены подобные треугольники	**2**
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	**1**
Всего баллов	**4**