

## 10 класс

### Вариант 3

**1. (6 баллов)** Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью  $V_0$ , второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью  $u$  с высоты  $H$ . В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Определите, какую скорость будет иметь второй шарик в тот момент времени, когда первый шарик упадет на Землю? Считайте, что

$$V_0 > \sqrt{gH} > u,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

**Возможное решение.** Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0 \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}.$$

Здесь  $h_1$  – высота, на которой столкнулись шарики,  $\tau_1$  – время полета шариков до столкновения,  $g$  – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H \frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2} \left( \frac{H}{V_0 + u} \right)^2$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g \tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = u - g \tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u}.$$

Скорость второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

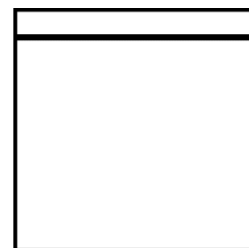
$$V_{22} = V_{21}' - g\tau_1' = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH}.$$

**Ответ:**  $V_{22} = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH}.$

#### Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для высоты столкновения шариков	1
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	2
Записано выражение для расчета времени полета	1
Записано выражение для расчета скорости второго шарика	1
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	1
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**2. (4 балла)** Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет  $a = 0,9$  м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен метиловым спиртом. Какое количество вещества идеального газа нужно закачать в пространство над поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние  $\Delta h = 0,9$  мм? Температуры газа и спирта одинаковы, постоянны и равны  $t = 17$  °С. Значение универсальной газовой постоянной  $R = 8,31$  Дж/(К·моль). Сжимаемость спирта (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет  $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>.



**Возможное решение.** При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление спирта на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения газом пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0,3 \text{ моль}.$$

**Ответ:**  $\nu = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0,3 \text{ моль}.$

### Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Получено выражение для относительного изменения объема	<b>1</b>
Получено выражение для давления	<b>1</b>
Получен ответ в общем виде	<b>1</b>
Получен окончательный ответ в виде числа	<b>1</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>

**3. (6 баллов)** В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой  $M$ , находится газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно. Количество теплоты, сообщенное газу за промежуток времени  $\tau$ , равно  $Q$ . Определите ускорение поршня. Внутренняя энергия одного моля газа равна  $U = cT$ . Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

**Решение.** Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c\Delta T.$$

Здесь  $p$  – давление газа,  $V$  – его объем,  $\nu$  – количество вещества газа. В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$v\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$a = \sqrt{\frac{2Q}{M\tau^2 \left(1 + \frac{c}{R}\right)}}.$$

**Ответ:**  $a = \sqrt{\frac{2Q}{M\tau^2 \left(1 + \frac{c}{R}\right)}}.$

### Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для первого начала термодинамики	1
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	1
Записана теорема об изменении кинетической энергии	2
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**4. (4 балла)** При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально, имея ускорение  $a_1$ . После удара мяч полетел вертикально вверх с скоростью  $V_2$  и ускорением  $a_2$ . Определите скорость мяча непосредственно перед ударом.

**Возможное решение.** Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь  $F_1$  – сила сопротивления,  $m$  – масса мяча,  $k$  – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2} V_2^2 + mg}{m} = a_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 + g.$$

Окончательно получаем

$$V_1 = V_2 \sqrt{\frac{a_1}{a_2 - g}}.$$

**Ответ:**  $V_1 = V_2 \sqrt{\frac{a_1}{a_2 - g}}$ .

*Критерии оценивания*

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	<b>1</b>
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	<b>1</b>
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	<b>2</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>

**5. (6 баллов)** Две одинаковы проводящие сферы находятся на большом расстоянии друг от друга и имеют положительные заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ . Незаряженный металлический шарик на непроводящем подвесе подносят к первой сфере и касаются её. Затем шарик подносят ко второй сфере и касаются её. После этого заряд шарика оказался равным  $q_2$ . Найдите заряд второй сферы после всех манипуляций.

**Возможное решение.** Пусть емкости сфер равны  $C_1$ , а емкость шарика равна  $C$ . После соприкосновения шарика с первой сферой его заряд станет равным

$$q_1 = \frac{Q_1}{1 + \frac{C_1}{C}},$$

Из закона сохранения заряда для соприкосновения шарика со второй сферой получим:

$$q_1 + Q_2 = q_2 + Q_2'.$$

Потенциалы второй сферы и шарика при соприкосновении равны, поэтому

$$C q_2 = C_1 Q_2'.$$

Тогда можем записать:

$$q_1 = \frac{Q_1}{1 + \frac{Q_2'}{q_2}}.$$

Получим уравнение:

$$Q_2'^2 - (Q_2 - 2q_2)Q_2' - q_2(Q_1 + Q_2 - q_2) = 0$$

Решение этого уравнения:

$$Q_2' = \frac{Q_2}{2} - q_2 \pm \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} + Q_1 q_2}.$$

**Ответ:**  $Q'_2 = \frac{Q_2}{2} - q_2 \pm \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} + Q_1 q_2}$ .

**Критерии оценивания**

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для заряда $q_1$	<b>1</b>
Записано выражение для закона сохранения заряда	<b>1</b>
Записано выражение для равенства потенциалов при соприкосновении шарика и сферы	<b>1</b>
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	<b>3</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**6. (4 балла)** За собирающей тонкой линзой с фокусным расстоянием  $F$  в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии  $d > F$  от линзы помещен точечный источник света. Радиус светового пятна на экране равен  $D'$ . Определите диаметр линзы.

**Возможное решение.** Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что

$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Тогда

$$D = \frac{D'd}{F}.$$

**Ответ:**  $D = \frac{D'd}{F}$ .

**Критерии оценивания**

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Построен чертеж	<b>1</b>
Рассмотрены подобные треугольники	<b>2</b>
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	<b>1</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>

