

## 10 класс

### Вариант 7

**1. (6 баллов)** Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью  $V_0 = 10$  м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью  $u = 4$  м/с с высоты  $H = 9$  м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарики продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в  $k = 1,96$  раза. Определите скорость второго шарика непосредственно перед вторым соударением с первым шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Возможное решение.** При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0 \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}$$
$$h_1 = H - u \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}.$$

Здесь  $h_1$  – высота, на которой столкнулись шарики,  $\tau_1$  – время полета шариков до столкновения,  $g$  – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H \frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2} \left( \frac{H}{V_0 + u} \right)^2 = 4,36 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g \tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$
$$V_{21} = -u - g \tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$
$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} \approx 3,57 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH} = 14 \text{ м/с}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0,36 \text{ с}.$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V_{21}' - g\tau_1' = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = 0.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} = 5 \text{ м}.$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V_{11}''}{\sqrt{k}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Искомое время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h_1'}{V_{12} + |V_{22}|} = 0,5 \text{ с}.$$

Перед вторым соударением скорость второго шарика будет равна

$$V_{22}' = V_{22} + g\tau_2 \approx 6,03 \text{ м/с}.$$

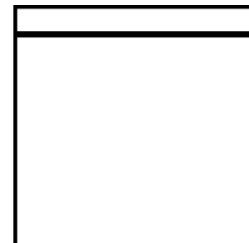
**Ответ:**  $V_{12}' \approx 6,03 \text{ м/с}.$

### **Критерии оценивания**

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для высоты столкновения шариков	<b>1</b>

Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	<b>1</b>
Записано выражение для расчета времени полета	<b>1</b>
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	<b>1</b>
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	<b>2</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**2. (4 балла)** Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет  $a = 1,2$  м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен глицерином. Затем в пространство над поршнем закачивают  $\nu = 0,5$  моль идеального газа. На какое расстояние сместился поршень? Температуры газа и глицерина одинаковы, постоянны и равны  $t = 17$  °С. Значение универсальной газовой постоянной  $R = 8,31$  Дж/(К·моль). Сжимаемость глицерина (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет  $\varepsilon = 2,2 \cdot 10^{-10}$  Па<sup>-1</sup>.



**Возможное решение.** При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление глицерина на верхнюю крышку отсутствует, по окончании заполнения газом пространства над поршнем давление там составит

$$p = \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для количества вещества получим:

$$\nu = \frac{pV'}{RT} = \frac{a(\Delta h)^2}{\varepsilon RT} \approx 0,3 \text{ моль}.$$

Поршень сдвинется на расстояние

$$\Delta h = \sqrt{\frac{\nu \varepsilon RT}{a}} \approx 0,225 \text{ мм}.$$

**Ответ:**  $\Delta h = \sqrt{\frac{\nu \varepsilon RT}{a}} \approx 0,225 \text{ мм}.$

### Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Получено выражение для относительного изменения объема	1
Получено выражение для давления	1
Получен ответ в общем виде	1
Получен окончательный ответ в виде числа	1
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>

**3. (6 баллов)** В вертикальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой  $M$ , находится газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением  $a$ . За время нагрева поршень выходит из сосуда, а затем продолжает движение вертикально вверх в свободном пространстве. Средняя мощность нагревателя равна  $P$ . Определите время подъема поршня до максимальной высоты над краем сосуда. Внутренняя энергия одного моля газа равна  $U = cT$ . Ускорение свободного падения  $g$ . Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

**Возможное решение.** Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c\Delta T.$$

Здесь  $p$  – давление газа,  $V$  – его объем,  $\nu$  – количество вещества газа. В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2} \left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

За время движения в цилиндре поршень приобрел скорость

$$V = a\tau.$$

Тогда

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{MaV}{2} \left(1 + \frac{c}{R}\right).$$

Учитывая, что

$$H = \frac{V^2}{2g},$$

в окончательной форме получаем

$$H = \frac{2P^2}{M^2 a^2 g \left(1 + \frac{c}{R}\right)^2}.$$

**Ответ:**  $H = \frac{2P^2}{M^2 a^2 g \left(1 + \frac{c}{R}\right)^2}.$

**Критерии оценивания**

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для первого начала термодинамики	<b>1</b>
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	<b>1</b>
Записана теорема об изменении кинетической энергии	<b>1</b>
Получено выражение для связи мощности и скорости поршня	
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	<b>2</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**4. (4 балла)** Два маленьких шарика испытывают абсолютно упругое столкновение. После столкновения первый шар потерял долю  $\eta$  своей кинетической энергии. Масса второго шарика  $M$ . Определите массу первого шара.

**Возможное решение.** Покажем, что при заданных условиях и не указанных дополнительных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился. При абсолютно упругом соударении суммарная кинетическая энергия шаров не изменяется. Тогда в лабораторной системе отсчета выполняется условие:

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2.$$

Это можно записать как

$$\frac{\eta m V_1^2}{2} = \frac{M V_2'^2}{2} - \frac{M V_2^2}{2} \quad (*)$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью второго шарика до соударения. В этой системе отсчета

$$\frac{m(V_1 - V_2)^2}{2} = \frac{m(V'_1 - V_2)^2}{2} + \frac{M(V'_2 - V_2)^2}{2}.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$mV_1^2 - mV_1'^2 - MV_2'^2 = 2V_2(MV_2' + mV_1' - MV_2 - mV_1).$$

Выражение в скобках равно нулю, так как это разность суммарных импульсов шариков до и после соударения. Тогда

$$\eta mV_1^2 = MV_2'^2.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (\*), делаем вывод, что при заданных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился.

Кинетическая энергия первого шарика после удара равна

$$K_1' = \frac{mV_1'^2}{2}(1 - \eta).$$

Его скорость после соударения равна

$$V_1' = V_1\sqrt{1 - \eta}.$$

Из закона сохранения импульса

$$M = \frac{m(V_1 \pm V_1')}{V_2} = \frac{mV_1(1 \pm \sqrt{1 - \eta})}{V_2}.$$

Знак в выражении зависит от направления движения первого шарика после соударения. Кинетическая энергия второго шарика после соударения

$$K_2' = \eta mV_1^2.$$

Из этого следует, что

$$m = \frac{M\eta}{(1 \pm \sqrt{1 - \eta})^2}$$

**Ответ:**  $m = \frac{M\eta}{(1 \pm \sqrt{1 - \eta})^2}$

### **Критерии оценивания**

<b>Выполнение</b>	<b>Балл</b>
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для равенства кинетических энергий до и после соударения	<b>1</b>
Показана необходимость нулевой скорости второго шарика до соударения	<b>1</b>
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	<b>2</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>

**5. (6 баллов)** Два одинаковых воздушных конденсатора ёмкостью  $C$  каждый заряжены до напряжения  $U$ . Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрическую жидкость с проницаемостью  $\varepsilon$ , после чего конденсаторы соединяют параллельно. Определите количество теплоты, выделившееся при соединении конденсаторов.

**Возможное решение.** При погружении первого конденсатора в жидкость его заряд не изменяется, а ёмкость возрастает в  $\varepsilon$  раз. Напряжение на конденсаторе уменьшается в  $\varepsilon$  раз. При параллельном соединении конденсаторов напряжения на них становятся равными друг другу за счет перетекания заряда с одного конденсатора на другой при сохранении суммарного заряда конденсаторов. Энергия системы конденсаторов до соединения равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2\varepsilon} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}.$$

Напряжение на соединённых параллельно конденсаторах равно

$$U' = \frac{2U}{\varepsilon + 1}.$$

Энергия соединённых параллельно конденсаторов равна

$$W_2 = \frac{2CU^2\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{2CU^2}{(\varepsilon + 1)^2} = \frac{2CU^2}{\varepsilon + 1}.$$

Количество выделившейся теплоты:

$$Q = \Delta W = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

**Ответ:**  $Q = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$

#### **Критерии оценивания**

<b>Выполнение</b>	<b>Балл</b>
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	<b>0</b>
Записано выражение для энергии системы до соединения	<b>2</b>
Записано выражение для энергии системы после соединения	<b>2</b>
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	<b>2</b>
<b>Всего баллов</b>	<b>6</b>

**6. (4 балла)** За рассеивающей тонкой линзой с фокусным расстоянием  $F$  в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии  $d > F$  от линзы помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен  $D'$ . Определите диаметр линзы.

**Возможное решение.** Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что

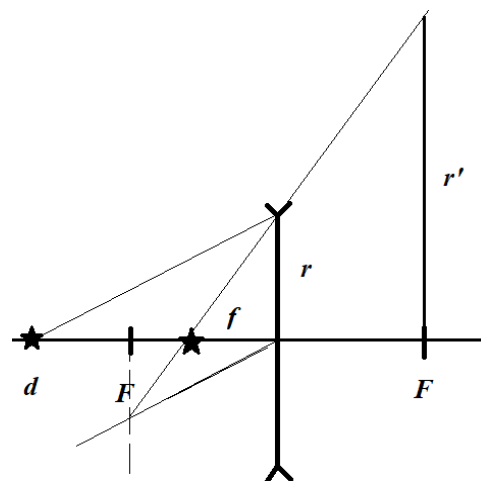
$$\frac{f}{r} = \frac{F + f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$D = \frac{D'd}{F + 2d}.$$

**Ответ:**  $D = \frac{D'd}{F + 2d}.$

**Критерии оценивания**



Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Построен чертеж	1
Рассмотрены подобные треугольники	2
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	1
<b>Всего баллов</b>	<b>4</b>