

10 класс

Вариант 8

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью $V_0 = 11$ м/с, второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью $u = 1$ м/с с высоты $H = 10$ м. В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Шарика продолжают движение. При отскоке первого шарика от поверхности Земли его механическая энергия уменьшается в $k = 1,96$ раза. Определите максимальную высоту подъема второго шарика после второго соударения с первым шариком. Считайте, что значение ускорения свободного падения $g = 10$ м/с².

Возможное решение. При всех расчетах примем, что вертикальная ось координат направлена вверх. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0 \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}$$
$$h_1 = H - u \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H \frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2} \left(\frac{H}{V_0 + u} \right)^2 = 5,69 \text{ м}.$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g \tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$
$$V_{21} = -u - g \tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$
$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u} \approx 2,67 \text{ м/с}.$$

Заметим, что дальнейшие преобразования, проводимые в общем виде, требуют излишне трудоемких операций, поэтому будем поводить численные расчеты.

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH} \approx 14,18 \text{ м/с.}$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u} \approx 0,48 \text{ с.}$$

Проекция скорости второго шарика в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$V_{22} = V_{21}' - g\tau_1' = V_0 + u - \sqrt{u^2 + 2gH} = -2,18 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Высота, на которой будет находиться второй шарик в момент времени, когда первый шарик коснется поверхности, будет равна

$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} \approx 5,82 \text{ м.}$$

Скорость первого шарика сразу после отскока будет равна

$$V_{12} = \frac{V_{11}''}{\sqrt{k}} \approx 10,13 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Время полета первого шарика от отскока от поверхности Земли до второго соударения с другим шариком будет равно

$$\tau_2 = \frac{h_1'}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 0,47 \text{ с.}$$

Скорость первого шарика перед вторым столкновением и скорость второго шарика после столкновения будут равны

$$V'_{12} = V_{12} - g\tau_2 = V_{12} - \frac{gh_1'}{V_{12} + |V_{22}|} \approx 5,4 \text{ м/с.}$$

Высота второго соударения шариков будет равна

$$h_2 = h_1' \frac{V_{12}}{V_{12} + |V_{22}|} - \frac{g}{2} \left(\frac{h_1'}{V_{12} + |V_{22}|} \right)^2 \approx 3,67 \text{ м.}$$

Максимальная высота подъема второго шарика будет равна

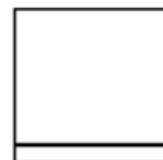
$$h_m = h_2 + \frac{V_{12}'^2}{2g} \approx 5,13 \text{ м.}$$

Ответ: $h_m = h_2 + \frac{V_{12}'^2}{2g} \approx 5,13 \text{ м.}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для высоты столкновения шариков	1
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	2
Записано выражение для расчета времени полета	1
Записаны выражения для расчета начальных высот и скоростей для второго столкновения	1
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	1
Всего баллов	6

2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет $a = 1$ м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен минеральным индустриальным маслом. В пространство под поршнем закачивают $\nu = 0,6$ молей идеального газа. При этом поршень сдвинулся на $\Delta h = 1$ мм. Какова была температура масла? Температуры газа и масла одинаковы и, постоянны в процессе заполнения пространства газом. Значения универсальной газовой постоянной $R = 8,31$ Дж/(К·моль), ускорения свободного падения $g = 10$ м/с² плотности масла $\rho = 890$ кг/м³. Сжимаемость масла (относительное изменение объема при изотермическом изменении давления) составляет $\varepsilon = 6,8 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹.



Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \rho g a.$$

По окончании заполнения неона пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \rho g a + \frac{\Delta h}{a \varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для получим:

$$T = \frac{pV'}{\nu R} = \frac{a^3 \Delta h}{\nu R} \left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2} \right) \approx 297 \text{ К}.$$

Ответ: $T = \frac{pV'}{\nu R} = \frac{a^3 \Delta h}{\nu R} \left(\rho g + \frac{\Delta h}{\varepsilon a^2} \right) \approx 297 \text{ К}.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Получено выражение для относительного изменения объема	1
Получено выражение для давления	1
Получен ответ в общем виде	1
Получен окончательный ответ в виде числа	1
Всего баллов	4

3. (6 баллов) В вертикальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массой M , находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением a . За время нагрева поршень выходит из сосуда, а затем продолжает движение вертикально вверх в свободном пространстве. Средняя мощность нагревателя равна P . Определите максимальную высоту подъема поршня над краем сосуда. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Ускорение свободного падения g . Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Решение **Возможное решение.** Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V} \Delta T.$$

Здесь p – давление газа, V – его объем, ν – количество вещества газа. В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T.$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$\nu \Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

Количество переданной теплоты:

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{cM(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2} \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R} \right).$$

За время движения в цилиндре поршень приобрел скорость

$$V = at.$$

Тогда

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{MaV}{2} \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R} \right).$$

Учитывая, что

$$V = g\tau',$$

в окончательной форме получаем

$$\tau' = \frac{2P}{Mg \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R} \right)}.$$

Ответ: $\tau' = \frac{2P}{Mg \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R} \right)}.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для первого начала термодинамики	1
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	1
Записана теорема об изменении кинетической энергии	1
Получено выражение для связи мощности и скорости поршня	
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2
Всего баллов	6

4. (4 балла) Два маленьких шарика испытывают абсолютно упругое столкновение. После столкновения первый шар потерял долю η своей кинетической энергии. Определите отношение массы первого шара к массе второго шарика.

Возможное решение. Покажем, что при заданных условиях и не указанных дополнительных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился. При абсолютно упругом соударении суммарная кинетическая энергия шаров не изменяется. Тогда в лабораторной системе отсчета выполняется условие:

$$K_1 + K_2 = K'_1 + K'_2.$$

Это можно записать как

$$\frac{\eta m V_1^2}{2} = \frac{M V_2'^2}{2} - \frac{M V_2^2}{2} \quad (*)$$

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся со скоростью второго шарика до соударения. В этой системе отсчета

$$\frac{m(V_1 - V_2)^2}{2} = \frac{m(V_1' - V_2)^2}{2} + \frac{M(V_2' - V_2)^2}{2}.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$mV_1^2 - mV_1'^2 - MV_2'^2 = 2V_2(MV_2' + mV_1' - MV_2 - mV_1).$$

Выражение в скобках равно нулю, так как это разность суммарных импульсов шариков до и после соударения. Тогда

$$\eta mV_1^2 = MV_2'^2.$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (*), делаем вывод, что при заданных условиях решение существует только в случае, когда второй шарик покоился.

Кинетическая энергия первого шарика после удара равна

$$K_1' = \frac{mV_1^2}{2}(1 - \eta).$$

Его скорость после соударения равна

$$V_1' = V_1\sqrt{1 - \eta}.$$

Из закона сохранения импульса

$$M = \frac{m(V_1 \pm V_1')}{V_2} = \frac{mV_1(1 \pm \sqrt{1 - \eta})}{V_2}.$$

Знак в выражении зависит от направления движения первого шарика после соударения. Кинетическая энергия второго шарика после соударения

$$K_2' = \eta mV_1^2.$$

Из этого следует, что

$$k = \frac{\eta}{(1 + \sqrt{1 - \eta})^2}$$

Ответ: $k = \frac{\eta}{(1 + \sqrt{1 - \eta})^2}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для равенства кинетических энергий до и после соударения	1
Показана необходимость нулевой скорости второго шарика до соударения	1

Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2
Всего баллов	4

5. (6 баллов) Два одинаковых воздушных конденсатора заряжены до напряжения U каждый. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ε , после чего конденсаторы соединяют параллельно. Количество теплоты, выделившееся при соединении конденсаторов, равно Q . Определите емкость конденсаторов.

Возможное решение. При погружении первого конденсатора в жидкость его заряд не изменяется, а емкость возрастает в ε раз. Напряжение на конденсаторе уменьшается в ε раз. При параллельном соединении конденсаторов напряжения на них становятся равными друг другу за счет перетекания заряда с одного конденсатора на другой при сохранении суммарного заряда конденсаторов. Энергия системы конденсаторов до соединения равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2\varepsilon} + \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon}.$$

Напряжение на соединенных параллельно конденсаторах равно

$$U' = \frac{2U}{\varepsilon + 1}.$$

Энергия соединенных параллельно конденсаторов равна

$$W_2 = \frac{2CU^2\varepsilon}{(\varepsilon + 1)^2} + \frac{2CU^2}{(\varepsilon + 1)^2} = \frac{2CU^2}{\varepsilon + 1}.$$

Количество выделившейся теплоты:

$$Q = \Delta W = \frac{CU^2(\varepsilon - 1)^2}{2\varepsilon(\varepsilon + 1)}.$$

Из этого выражения получаем

$$C = \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 1)Q}{U^2(\varepsilon - 1)^2}$$

Ответ: $C = \frac{2\varepsilon(\varepsilon + 1)Q}{U^2(\varepsilon - 1)^2}$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для энергии системы до соединения	2
Записано выражение для энергии системы после соединения	2
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2

Всего баллов	6
---------------------	----------

6. (4 балла) За рассеивающей тонкой линзой с фокусным расстоянием F и диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии большем фокусного от линзы помещен точечный источник света. диаметр светового пятна на экране равен D' . Определите расстояние от линзы до источника света.

Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что

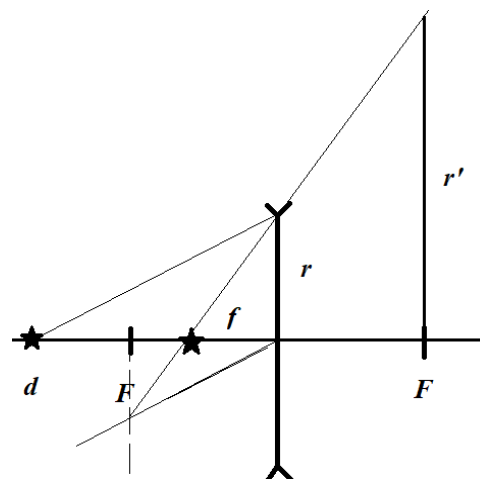
$$\frac{f}{r} = \frac{F + f}{r'}.$$

Используя уравнение для тонкой линзы, получим:

$$d = \frac{DF}{D' - 2D}.$$

Ответ: $d = \frac{DF}{D' - 2D}.$

Критерии оценивания



Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Построен чертеж	1
Рассмотрены подобные треугольники	2
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	1
Всего баллов	4