

10 класс

Вариант 2

1. (6 баллов) Два одинаковых маленьких шарика движутся вдоль одной вертикали. Первый шарик подброшен с поверхности Земли с начальной скоростью V_0 , второй шарик одновременно с запуском первого брошен вниз с начальной скоростью u с высоты H . В точке встречи происходит абсолютно упругий удар. Определите, на какой высоте будет находиться второй шарик в тот момент времени, когда первый шарик упадет на Землю? Считайте, что

$$V_0 > \sqrt{gH} > u,$$

где g – ускорение свободного падения.

Возможное решение. Запишем уравнения для первого и второго шариков для движения до соударения:

$$h_1 = V_0 \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}$$

$$h_1 = H - u \tau_1 - \frac{g \tau_1^2}{2}.$$

Здесь h_1 – высота, на которой столкнулись шарики, τ_1 – время полета шариков до столкновения, g – ускорение свободного падения. Из этих уравнений следует, что

$$\tau_1 = \frac{H}{V_0 + u}.$$

Высота, на которой столкнулись шарики, равна

$$h_1 = H \frac{V_0}{V_0 + u} - \frac{g}{2} \left(\frac{H}{V_0 + u} \right)^2$$

На этой высоте проекции скоростей шариков определяются как

$$V_{11} = V_0 - g \tau_1 = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V_{21} = -u - g \tau_1 = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Соударение шариков абсолютно упругое, поэтому проекции их скоростей после соударения по законам сохранения импульса и механической энергии с учетом равенства масс шариков определяются как

$$V'_{11} = V_{21} = -u - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

$$V'_{21} = V_{11} = V_0 - \frac{gH}{V_0 + u}.$$

Модуль скорости первого шарика у поверхности рассчитывается по закону сохранения механической энергии и будет равен

$$V_{11}'' = \sqrt{u^2 + 2gH}.$$

Время полета первого шарика от точки соударения до поверхности определяется из уравнения

$$V_{11}'' = V_{11}' + g\tau_1'.$$

Подставив в это уравнение рассчитанные ранее элементы, получим:

$$\tau_1' = \frac{\sqrt{u^2 + 2gH} - u}{g} - \frac{H}{V_0 + u}.$$

Второй шарик через это время окажется на высоте

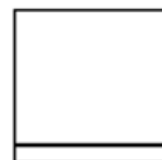
$$h_1' = h_1 + V_{21}'\tau_1' - \frac{g\tau_1'^2}{2} = \frac{(V_0 + u)(\sqrt{u^2 + 2gH} - u)}{g} - H \left(1 - \frac{gH}{2(V_0 + u)^2} \right).$$

Ответ: $h_1' = \frac{(V_0 + u)(\sqrt{u^2 + 2gH} - u)}{g} - H \left(1 - \frac{gH}{2(V_0 + u)^2} \right).$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для высоты столкновения шариков	1
Записано выражение для скоростей шариков после столкновения	2
Записано выражение для расчета времени полета	1
Записано выражение для расчета для высоты второго шарика	1
Произведены необходимые преобразования и получен окончательный ответ	1
Всего баллов	6

2. (4 балла) Кубический бак с жесткими стенками, длина ребра которого составляет $a = 1$ м, разделяется тонким легким недеформируемым поршнем, перемещающимся в вертикальном направлении без трения. Первоначально бак полностью заполнен водой массой $M = 1000$ кг. Какую массу неона нужно закачать в пространство под поршнем, чтобы поршень сдвинулся на расстояние $\Delta h = 0,5$ мм? Температуры неона и воды одинаковы, постоянны и равны $t = 32$ °С. Молярная масса неона $\mu = 20$ г/моль, значения универсальной газовой постоянной $R = 8,31$ Дж/(К·моль), ускорения свободного падения $g = 10$ м/с². Сжимаемость воды (относительное изменение объема при изотермическом увеличении давления) составляет $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹.



Возможное решение. При движении поршня относительное изменение объема составляет

$$\delta = \frac{a^2 \Delta h}{a^3} = \frac{\Delta h}{a}.$$

Начальное давление воды на дно равно

$$p' = \frac{Mg}{a^2}.$$

По окончании заполнения неоном пространства под поршнем давление там составит

$$p = p' + \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{Mg}{a^2} + \frac{\Delta h}{a\varepsilon}.$$

Воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева, для массы неона получим:

$$m = \frac{\mu p V'}{RT} = \frac{\mu a \Delta h}{RT} \left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon} \right) \approx 4 \text{ г}.$$

Ответ: $m = \frac{\mu a \Delta h}{RT} \left(\frac{Mg}{a} + \frac{\Delta h}{\varepsilon} \right) \approx 4 \text{ г}.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Получено выражение для относительного изменения объема	1
Получено выражение для давления	1
Получен ответ в общем виде	1
Получен окончательный ответ в виде числа	1
Всего баллов	4

3. (6 баллов) В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный газ. Газ нагревают, при этом поршень движется из состояния покоя равноускоренно с ускорением a . Количество теплоты, сообщенное газу за промежуток времени τ , равно Q . Определите массу поршня. Молярная теплоемкость газа в процессе при постоянном объеме равна $c_{\mu V}$. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь. С внешней стороны поршня вакуум.

Возможное решение. Поскольку поршень движется равноускоренно, то процесс изобарный. В соответствии с первым началом термодинамики

$$Q = p\Delta V + \nu c_{\mu V} \Delta T$$

В соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева

$$p\Delta V = \nu R \Delta T$$

По теореме об изменении кинетической энергии

$$p\Delta V = \frac{M(a\tau)^2}{2}.$$

Значит,

$$v\Delta T = \frac{M(a\tau)^2}{2R}.$$

В окончательной форме получаем

$$Q = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{c_{\mu V} M(a\tau)^2}{2R} = \frac{M(a\tau)^2}{2} \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)$$

$$M = \frac{2Q}{(a\tau)^2 \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)}.$$

Ответ: $M = \frac{2Q}{(a\tau)^2 \left(1 + \frac{c_{\mu V}}{R}\right)}.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для первого начала термодинамики	1
Записано уравнение Клапейрона – Менделеева	1
Записана теорема об изменении кинетической энергии	2
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2

4. (4 балла) При движении в воздухе на мяч действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости. Непосредственно перед ударом волейболиста мяч летел горизонтально со скоростью V_1 . После удара мяч полетел вертикально вверх с скоростью V_2 и ускорением a_2 . Определите ускорение мяча непосредственно перед ударом.

Возможное решение. Запишем уравнение связи ускорения мяча и его скорости в горизонтальном движении:

$$a_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{kV_1^2}{m}.$$

Здесь F_1 – сила сопротивления, m – масса мяча, k – коэффициент пропорциональности. После удара мяч полетел вверх, на него действуют силы тяжести и сопротивления, направленные вниз. Его ускорение при этом будет равно

$$a_2 = \frac{kV_2^2 + mg}{m} = \frac{\frac{ma_1}{V_1^2} V_2^2 + mg}{m} = a_1 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 + g.$$

Для ускорения a_1 получаем

$$a_1 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 (a_2 - g).$$

Ответ: $a_1 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^2 (a_2 - g).$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записано выражение для ускорения в горизонтальном полете	1
Записано выражение для ускорения в вертикальном полете	1
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	2
Всего баллов	4

5. (6 баллов) В холодильной машине, работающей по обратному циклу Карно, в качестве холодильника используется вода при $T_x = 273$ К, а в качестве нагревателя – вода при $T_n = 373$ К. Сколько воды нужно превратить в пар в нагревателе, чтобы заморозить $m = 2$ кг воды в холодильнике? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2,26$ МДж/кг.

Возможное решение. Чтобы испарить воду, надо затратить количество теплоты

$$Q_1 = rm'.$$

При замерзании выделяется количество теплоты.

$$Q_2 = \lambda m.$$

Холодильная машина работает по циклу Карно, поэтому

$$\frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{T_x}{T_r}.$$

Тогда

$$m' = \frac{T_r \lambda m}{T_x r} = 0,405 \text{ кг}.$$

Ответ: $m' = \frac{T_r \lambda m}{T_x r} = 0,405 \text{ кг}.$

Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Записаны выражения для количеств теплоты (по 1 баллу за каждое)	2
Записано выражение для связи количеств теплоты	2
Произведены необходимые преобразования, получен окончательный ответ	2
Всего баллов	6

6. (4 балла) За собирающей тонкой линзой диаметром D в ее фокусе перпендикулярно ее оптической оси расположен плоский экран. Перед линзой на главной оптической оси на расстоянии d от линзы больше фокусного помещен точечный источник света. Диаметр светового пятна на экране равен D' . Определите фокусное расстояние линзы.

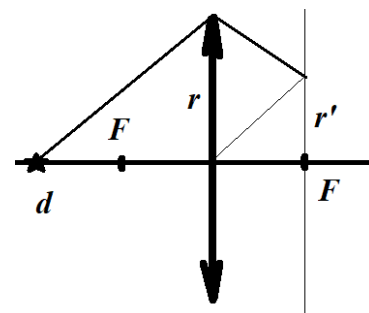
Возможное решение. Рассмотрим чертеж. Учтем, что $D = 2r$, $D' = 2r'$. Из чертежа из подобия треугольников, образованных лучом и главной и побочной осями, видно, что

$$D' = \frac{FD}{d}.$$

Тогда

$$F = \frac{D'd}{D}.$$

Ответ: $F = \frac{D'd}{D}.$



Критерии оценивания

Выполнение	Балл
Участник не приступал к заданию или выполнил его с самого начала неверно	0
Построен чертеж	1
Рассмотрены подобные треугольники	2
Произведены необходимые преобразования и получен ответ	1
Всего баллов	4