



ОТРАСЛЕВАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ



$$E = mc^2$$



ШИФР

1 2 0 4 1 6

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Бланк олимпиадной работы

Класс 9 Вариант 31 Дата Олимпиады 12.02.2023

Площадка написания КНИТУ

ОЦЕНКА

(заполняется проверяющим)

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ		Подпись
											Цифрой	Прописью	
Оценка	5	0	15	20	8	2					50	Пятьдесят	Ем

Задача 1.

Заметим, что
$$\frac{a^8 + 1296}{36a^4} = \frac{a^4}{36} + \frac{36}{a^4} = \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{6}}{a}\right)^4$$

Теперь подсчитаем $\left(\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{a}\right)^4$.
$$\left(\frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{6}}{a}\right)^2 = \frac{a^2}{6} + 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{a} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} + \frac{6}{a^2} = \frac{a^2}{6} + 2 + \frac{6}{a^2}$$

$$+ \frac{6}{a^2} = 5^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{6} + \frac{6}{a^2} = 25 - 2 = 23. \left(\frac{a^2}{6} + \frac{6}{a^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{a^4}{36} + 2 \cdot \frac{a^2}{6} \cdot \frac{6}{a^2} + \frac{36}{a^4} = 23^2 = 529 \Leftrightarrow \frac{a^4}{36} + \frac{36}{a^4} = 529$$

$$= \frac{a^8 + 1296}{36a^4}$$

Ответ: 529.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



Бланк олимпиадной работы

Задание №3.

В условии сказано, что относительная частота (отн. част.) случайно выбранная проба (случ. выбор. пр.) окажется пробой тяжелой нефти равна $\frac{1}{7}$. Это означает, что общее число проб кратно 7, округляется до 100 и $\frac{1}{7}$ из них - тяжелые пробы. Отсюда ясно, всего проб было 98, т.к. $98 : 7$ и округл. в больш. сторону $\Rightarrow 98 \approx 100$. 91 тонне кратно 7, как и 105, и они округл. не в сторону 100 по правилам округл. Отсюда ясно, что проб тяжелой нефти было $\frac{98}{7} = 14$. Также в условии сказано, что отн. част., что случ. выбор. окажется легкой малосернистой нефтью равна $\frac{9}{14}$.

~~Тяжелой нефти~~ а также зная, что все пробы тяж. нефти - высокосернистые, всего легкой малосернистой нефти будет $\frac{98}{14} \cdot 9 = 63$ проб. Значит, $98 - 63 - 14 = 21$ проб легкой нефти будут высокосернистые. Значит, всего проб высокосернистой нефти $14 + 21 = 35$.

Ответ: 35 проб.



$$(ab)c = a(bc)$$

$$E = mc^2$$



ШИФР

120416

0123456789

Бланк олимпиадной работы

Задание №4.

Найдём x_2 по формуле для $n=1$. $\frac{x_0 + 298x_1 + x_2}{300} = x_1$

$\Rightarrow x_2 = 2x_1$, т.к. $x_0 = 0$. Теперь докажем, что если

$$x_n = nx_1, \text{ то } x_{n+1} = (n+1)x_1. \text{ Для } x_n = \frac{x_{n-1} + 298x_n + x_{n+1}}{300} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow 300nx_1 = (n-1)x_1 + 298nx_1 + x_{n+1} \Rightarrow 2nx_1 = nx_1 - x_1 + x_{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow nx_1 + x_1 = x_{n+1} = (n+1)x_1$. Значит, $x_n = nx_1$, что ясно из ранее доказанных фактов (фактически,

для $n=1$ - базы индукции и $x_n = nx_1 \Rightarrow x_{n+1} = (n+1)x_1$ - индуктивного перехода, какому член послед. задаётся

как $x_n = x_1 \cdot n$ (индукция). Тогда $\sqrt{\frac{x_{2023} - x_1}{2021} - \frac{2022}{x_{2023} - x_1}} - 2023 =$
 $= \sqrt{\frac{(2023-2)x_1}{2021} \cdot \frac{2022}{(2023-1)x_1}} - 2023 = 1 - 2023 = -2022.$

Ответ: -2022.

Задание №5.

Значение арифм. корня четной степени всегда неотрицательно.

а значит, $\sqrt[2022]{x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\right) = -5. \text{ Отсюда}$$

ясно, что $\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$. Тогда $x^2 + 1 = x, x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset, \text{ т.к. } D < 0.$$

Бланк олимпиадной работы

Задание №6.

Заметим, что $r_{\max} \leq 17$ км, иначе радары не покроют центр платформы. При расположении радаров через равн. промежутки на окружности радиусом $r = 17$ км ~~каждый~~ ~~каждый~~ каждый радар точно покрывает $\frac{1}{8}$ окружн. с $r = \frac{16}{2} = 8$ км (у обеих окружностей центр — центр платформы). Также ясно, что всего ими будет покрыто кольцо с $r = \frac{16}{2} \cdot 2 = 16$ км (полностью).

т.к. $S_{\text{кольца}} = \pi r^2$, $\pi \approx 3,14$, $S_{\text{кольца}} = 3,14 \cdot 16^2 = 803,84 \text{ км}^2$

Ответ: ~~803,84 км²~~ 17 км; 803,84 км²